Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

51 - 1В
аудитория – посадочное место

41306305
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ ПР	+ МС	— МК	
7 АЮ	7 ЦЮ	7 И.Б.	0 АБ	21

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306305 — номер участника

№1

из условия $1 < k < 7$ (те за которые ставят пятерки)

Заметим что и за $k = 2$, и за $k = 4$ получить пятерки одновременно невозможно. Предположим противное:

тогда $n = a + (a+1) = b + (b+1) + (b+2) + (b+3)$, где $a, b \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $2a + 1 = 4b + 6$, тогда слева нег. а справа четное (!) $\Rightarrow$ можно получить пятерки одновременно $\leq$ чем за 4 разл. k

Пример:

$n = 45 = \underbrace{22 + 23}_{k=2} = \underbrace{14 + 15 + 16}_{k=3} = \underbrace{7 + 8 + 9 + 10 + 11}_{k=5} = \underbrace{5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}_{k=6}$

Ответ: 4.

№2

Пусть каждый ученик ходит на k кружков (из усл известно что каждый посещает одинаковое кол-во кружков)

Посчитаем учеников используя то что для любых 2 кружков найдется ровно 3 ученика, кот. посещают их

$3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 63$

Заметим что при таком подсчете каждого ученика мы считаем столько раз, сколько есть способов выбрать 2 кружка из тех, на которые он ходит, т. е. $\frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow$ всего учеников $\frac{63}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3^2}{k(k-1)}$,

$6 < \frac{2 \cdot 7 \cdot 3^2}{k(k-1)} < 60 \Rightarrow$ (1) $126 \vdots k(k-1)$, (2) $2 < k(k-1) < 21$

подходят под (2) $k = 5; 4; 3;$ из них под (1) подходит только $k = 3 \Rightarrow$ учеников $\frac{126}{3 \cdot 2} = 21$

Ответ: только 21 ученик.

№3

Перепишем условие $a^2+b^2+c^2=a+b+c$ как.

$(a-1)a = b(1-b)+c(1-c)$

$a^2-a = -(b-0,5)^2+0,25-(c-0,5)^2+0,25 \le 0,5$

$(a-0,5)^2 = 0,75-(b-0,5)^2-(c-0,5)^2 \Rightarrow (a-0,5)^2 \le 0,75 \Rightarrow$ условие.

$\Rightarrow a \le \sqrt{0,75}+0,5$ для b и c аналогично т.к. условие симм. отн. перестановок a, b, c.

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \ge \frac{3}{1+a+b+c}$ $(a^2-1)(a-1)=a^3-a^2-a+1$

Отнимем от каждой дроби слева $\frac{1}{1+a+b+c}$ а $\frac{3}{1+a+b+c}$ справа.

Рассмотрим ~~[illegible]~~ пример такой разности:

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} - \frac{1}{1+a+b+c} = \frac{(1+a)(a-1)^2+(a-1)^2(b+c)-b-c-1}{\text{полож.}\cdot\text{полож.}=\text{полож.}} =$

$= \frac{a^3-a^2-a+(b+c)(a^2-2a)}{\text{полож}} = \frac{a(a^2-a-1+(b+c)(a-2))}{\text{полож.}} =$

$= \frac{\text{неотр}((a^2-a-1)+(\text{неотр})(a-2))}{\text{полож.}}$ — ранее мы давали оценку, что каждое из $a, b, c \le \sqrt{0,75}+0,5 \Rightarrow a-2$ — отриц,

$a(a-1)$ a^2-a-1 — тоже отрицательное. $\Rightarrow x \le 0$ с остальными 2 разностями аналогично а ~~и~~ на левой стороне осталось $0 \Rightarrow$ мы свели исходное нер-во к:

не полож. + не полож. + не полож ≤ 0 — очевидно. ч.т.д.

$(a^2-a-1=(a-0,5)^2-1,25$, $(a-0,5)^2 \le 0,75$ поэтому $a^2-a-1 \le 0$,

$a-2$ — отриц т.к. $a \le \sqrt{0,75}+0,5$, $\sqrt{0,75}<1$, $0,5<1$ сложим и получим $\sqrt{0,75}+0,5<2 \Rightarrow a-2<0)$

№4.

Построим граф в котором каждому звену соотв вершина несамопересек. ломанной, а ~~каждые вершины~~ ребрами соединим вершины у кот. соотв. звенья пересекаются под прямым углом, заметим что он двудольный т.к. не имеет в себе нечет циклов т.к. в прот случае параллельные ребра пересекаются.

Что дальше?

8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

51 - 56
аудитория – посадочное место

41306305
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ мг	+ кн	— А.П.	Ø КА	
7 вс ✓	7 МС	0 МС	Ø МК	14

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306305 — номер участника

лист 1 из 3

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1

Предположим противное:

Предположим мы нашли квадрат 9×9 в котором находится ≤ 10 королей. Разобьем исходную доску 30×30 на $15^2=225$ квадратов 2×2. В каждом таком может стоять ≤ 1 король (если они не бьют друг друга). Найденный 9×9 накрывает ≥ 16 таких 2×2 $\Rightarrow$ в остальной области осталось $\leq \overset{225-16}{=} 209$ зон (квадратов 2×2 или их непокрытых частей) в каждой из которых умещается ≤ 1 король $\Rightarrow$ на доске $\leq 209+10$ королей ! т.к. их 220.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

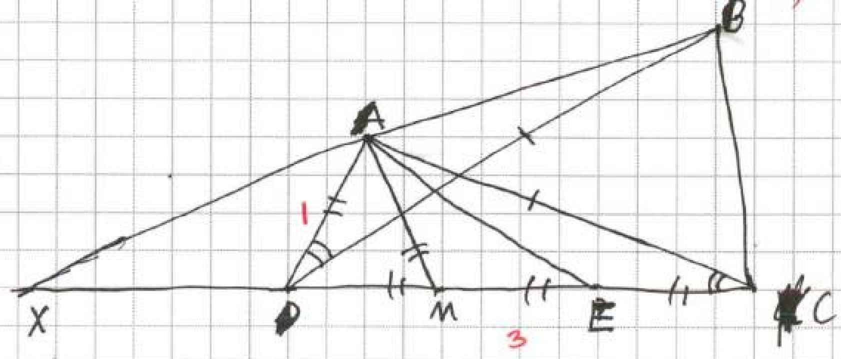
8 класс

41306305 номер участника

лист 2 из 3

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2 (6)



~~Отметим на отрезке AD точку E: DE = 1, тогда~~
~~ED = AB, ∠EDB = ∠BAC~~

Отметим на отрезке CD точку E: CE = 1, тогда $EC = AD$, $\angle ACD = \angle ADB$, $AC = BD \Rightarrow^{(1)} \triangle EAC = \triangle ABD \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DEA = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, заметим что высота опущенная из D на AE равна $DE \cdot \sin(\angle DEA) = 1 = DA \Rightarrow \angle DAE = 90^\circ \Rightarrow$ медиана AM опущенная из A на DE равна половине гипотенузы $DE \Rightarrow$ равна $\frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$ $\triangle DAM$ равностор. $\Rightarrow \angle ADC = 60^\circ \Rightarrow$ продолжения AB и DC пересекаются по другую сторону от C отн. DA пусть в точке X (т.к. $\angle BAD + \angle ADC > 180^\circ$) $\Rightarrow$

$\angle AXD$ $\angle ADX = \angle ADC - (180^\circ - \angle DAB) = 30^\circ \Rightarrow \triangle AXD$ р/б с осн $AX \Rightarrow XD = 1 \Rightarrow XA = 2\sin(\angle XDA/2) \cdot AD = \sqrt{3}$. $DA = AM$, $XD = ME$, $\angle ADX = \angle AME \Rightarrow \triangle ADX = \triangle AME \Rightarrow AE = XA =$
$= \sqrt{3}$ из (1) следует что $AB = AE = \sqrt{3}$. Заметим что отр. $XAB = 2\sqrt{3}$ равен $\overset{\cos}{\cancel{\sin}} (\overset{\angle AXD}{\angle ADX}) \cdot XC = \frac{4\sqrt{3}}{2}$ откуда следует что $\triangle XBC$ прямоуг $\angle XBC = 90 \Rightarrow BC = \sin(\angle CXB) \cdot XC = 2$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 41306305

класс номер участника лист 3 из 3

~~№4~~

~~Предположим противное~~

~~Тогда для любых~~

№3 (7)

$$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)(a+1)(b+1)(c+1) +$$
$$+ (a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) - (a+b+c+1)^2$$

Пусть могло и оно равно p^2, тогда

$$p^2 = (a+1)(b+1)(c+1) + \frac{(a+b+1)(b+c+1)(a+c+1) - (a+b+c+1)^2}{abc+1}$$

очевидно что $p^2 \geq 8+2 \Rightarrow p \geq 5$?

$$(abc+1)(p^2-(a+1)(b+1)(c+1)) = (a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) - (a+b+c+1)^2$$

~~произведем перебор~~

По МТФ $p^2 \equiv_3 1$

Произведем перебор по модулю 3 и докажем что p либо

$\equiv_3$ с 2 [illegible]

?