1023- 1026

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия А Ф Л Я Т О Н О В

Имя: А Й Н У Р

Отчество: Т А Г И Р О В И Ч

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион ТАТАРСТАН

4. Контактный телефон +7 987 268 80-20

5. Контактный электронный адрес aynur.aflyatonov@mail.ru

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Афлятонов Айнур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Пусть n ~~4~~ 2 - хорошее и 4 - хорошее, тогда:

$n = a + (a+1) = 2a+1 \not\vdots\, 2$ и $n = b + (b+1) + (b+2) + (b+3) = 4b+6 \,\vdots\, 2$

т.е. $n \not\vdots\, 2$ и $n \,\vdots\, 2$, что невозможно, тогда n либо не 2-хорошее, либо не 4 хорошее, тогда Вася мог получить не ~~более~~ более 4 пятёрок (т.к. чисел >1 и <7 5, ~~тогда~~ или 2 или 4 не может быть). Тогда пример достойный 4 пятёрок — 45, т.к.:

$45 = 22 + 23$ (2 - хорошее

$45 = 14 + 15 + 16$ (3 - хорошее)

$45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ (5 - хорошее)

$45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ (6 - хорошее)

~~Ответ~~ Ответ: 4 пятёрки

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Архипонов Артур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Назовём тройку вида - ученик, кружок, кружок хорошей, если ученик из нее посещает оба её кружка. Тогда, если учеников - n, ~~кружков - 6~~ и каждый из них посещает k кружков, то со стороны школьников есть $n \cdot \frac{k\cdot(k-1)}{2}$ хороших троек (т.к для каждого ученика их $\frac{k\cdot k-1}{2}$), со стороны же кружков в хороших тройках - $\frac{7\cdot(7-1)}{2}\cdot 3 = \frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3$ (т.к для каждой пары кружков есть 3 тройки с этой парой). Тогда $n\cdot\frac{k\cdot(k-1)}{2} = \frac{7\cdot6}{2}\cdot3 \Rightarrow$ $\Rightarrow n\cdot k\cdot(k-1) = 7\cdot6\cdot3 = 2\cdot3\cdot3\cdot7$, тогда давайте переберём все нат. k, ~~и найдём те~~, для которых $\frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{k}$ целое, и найдём те, при которых $n = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{k\cdot(k-1)}$ - целое и для $6<n<60$, то тогда:

$(2\cdot3\cdot3\cdot7 = 126)$

$k=1 \Rightarrow n\cdot1\cdot0 = 2\cdot3\cdot3\cdot7$ - невозможно

$k=2 \Rightarrow n = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{2\cdot1} = 3\cdot3\cdot7 = 63$, $n>63$ - не может быть

$k=3 \Rightarrow n = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{3\cdot2} = 3\cdot7$ - возможно, $n=21$

$k=6 \Rightarrow n = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{6\cdot5} = \frac{21}{5}$ - ~~нев~~ нецелое - нельзя

$k=7 \Rightarrow n = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{7\cdot6} = 3$, $3<6$ - нельзя

Теперь заметим, что при $k>7$ $n = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7}{k\cdot(k-1)} < 3$, но $n>6$, тогда единственный вариант - $n=21$, тогда раз такая расстановка сущ. в принципе, то расстановка на $n=21$ тоже существует.

Ответ: 21

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: [illegible]

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Заметим, что из условия:

$a^2+b^2+c^2=a+b+c \Rightarrow (a-1)^2=a^2-2a+1= b+c+1-a-b^2-c^2$

$(b-1)^2=b^2-2b+1=a+c+1-b-a^2-c^2$

$(c-1)^2=c^2-2c+1=a+b+1-c-a^2-b^2$

и $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3=a+b+c-2a-2b-2c+3=$

$=3-a-b-c$, тогда

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \overset{?}{\le} \frac{3}{1+a+b+c} \quad \Big| \cdot (1+a+b+c)$$

$(1+a+b+c>0$ т.к. $a,b,c \geq 0)$

$$\frac{(a+b+c+1)}{b+c+1}\cdot(a-1)^2+\frac{a+b+c+1}{a+c+1}\cdot(b-1)^2+\frac{a+b+c+1}{a+b+1}\cdot(c-1)^2 \overset{?}{\le} 3$$

$\Updownarrow$

$$\left(\frac{a}{b+c+1}+1\right)\cdot(a-1)^2+\left(\frac{b}{a+c+1}+1\right)\cdot(b-1)^2+\left(\frac{c}{a+b+1}+1\right)\cdot(c-1)^2 \overset{?}{\le} 3$$

$\Updownarrow$

$$\frac{a}{b+c+1}\cdot(a-1)^2+\frac{b}{a+c+1}\cdot(b-1)^2+\frac{c}{a+b+1}\cdot(c-1)^2+\underline{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2} \overset{?}{\le} 3$$

$\Downarrow$

$$\frac{a}{b+c+1}\cdot(b+c+1-a^2-b^2-c^2)+b\cdot\frac{(a+c+1-b-a^2-c^2)}{a+c+1}+c\cdot\frac{(a+b+1-a^2-b^2)}{a+b+1}+3-a-b-c \overset{?}{\le} 3 \quad \Big| +a+b+c-3$$

$\Updownarrow$

$$a+b+c-\frac{(a+b^2+c^2)\cdot a}{b+c+1}-\frac{(b+a^2+c^2)\cdot b}{a+c+1}-\frac{c\cdot(a^2+b^2+c)}{a+b+1} \overset{?}{\le} a+b+c \quad \Big| -a-b-c$$

$$\frac{(a+b^2+c^2)\cdot a}{b+c+1}+\frac{(b+a^2+c^2)\cdot b}{a+c+1}+\frac{c\cdot(a^2+b^2+c)}{a+b+1} \geq 0$$

$\geq 0 \qquad \geq 0 \qquad$ но ≥ 0

последнее неравенство верно (т.к. a, b и c неотриц.)

тогда раз посл. ~~правда~~ ~~(т.к. a, b и c пол.)~~,

то первое тоже (т.к. все переходы были обратимы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ч.т.д.

Задача № 4 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Ларионов Артур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте назовём фигуру из 2 рёбер такого вида -

галочкой, тогда давайте зафиксируем угол между ними (∠1) и ориентацию, причём угол ∠1 такой, что бы вектор между чёрными точками был по ~~длин~~ длине $< \frac{1}{999999999}$ от длины рёбер, также скажем, что левая чёрная точка - первая, правая - вторая, тогда давайте ~~[illegible]~~ объединим 125 тысяч галочек в компанию из 250 рёбер (выглядеть будет примерно как ~~примерно~~ -

) ~~теперь~~ теперь заметим, что все точки различны и не лежат на звеньях (при каком-то ~~[illegible]~~ ∠1), тогда теперь повернём ориентацию галочки, повернув её на 90° по часовой стрелке и начнём присоединять к компании, получившейся до этого, теперь ещё 125 ~~[illegible]~~ тысяч галочек, тогда если мы возьмём ~~[illegible]~~ любые 2 галочки, 1 до поворота другая после, то 4 ребра в них разделятся на пары пересекающихся под углом 90 градусов (т.к. галочка после поворота просто повёрнута на 90 градусов и т.к. чёрные вектора очень маленькие (~~[illegible]~~ т.к. с каждой галочкой мы передвигаемся на чёрный вектор, не пересекаться они не могут) теперь снова повернём ~~на 90~~ галочку на 90° (теперь рёбра параллельны рёбрам в изнач. галочке) и снова ~~[illegible]~~ присоединим 125 тысяч галочек, и повторим это в 4-ый раз, тогда есть 4 ~~[illegible]~~ / ориентации галочек, и для каждого ребра из * галочки чётной ориентации оно будет пересекаться под 90° градусами ~~∞~~ с одним из каждой галочки из нечётной ориентации, и наоборот. Тогда кол-во пересечений под 90 градусов -

Задача № 4 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Афлатонов Айнур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

250. ~~также~~ (~~к~~ 125·2, кол-во галочек чётной ориентации, и 1 кол-во ~~галочек~~ галочек нечётной ориентации.

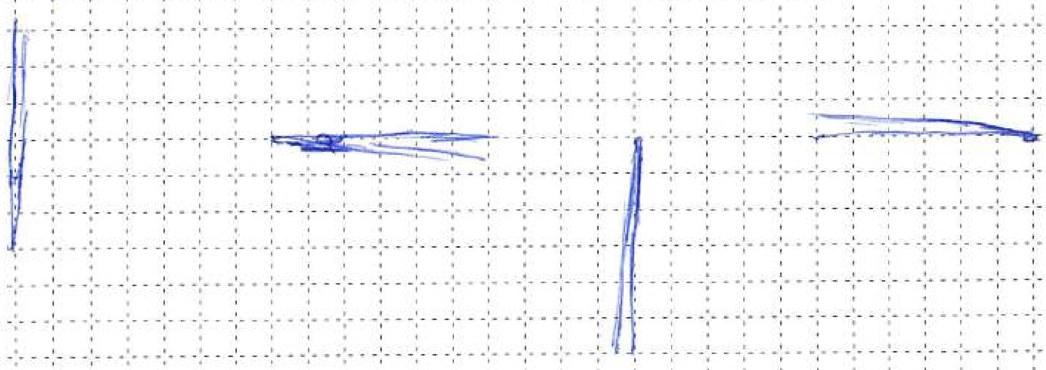
Теперь ~~заметим~~ скажем, что если 2 ре прямые соуд. рёбра параллельны, то эти рёбра 1 вида, тогда если $k \geq 1$, то все виды делятся на пары ~~перпенд.~~ перпендикулярных друг другу, тогда заметим, что видов тогда чётно, если вида 2, то заметим, что они ~~перпенд.~~ перпендикулярны друг другу, тогда все пространство можно разбить на клетчатое поле, тогда ни одна пара рёбер не пересекается перпендикулярно, т.к они максимум касаются (касаются и то максимум 2, тогда вида ≥ 4 и каждого вида хотя бы по k (т.к. для вида b перпенд. ~~а~~ a должно быть хотя бы k перпендикулярных виду b, т.е хотя бы k перпендикулярных виду a), тогда $k \leq 1000:4 = 250$

Ответ: 250

(Также заметим, что вектора 1-ой и 3-ей ориентации ~~...~~ противоположны, как и чёрные вектора 2-ой и 4-ой, и т.к. их равное кол-во пол. и первая ~~вершина~~ вершина совпадают, т.е. ломаная замкнутая!)

Ориентации галочек:

1. 2. 3. 4.



11²⁴ - 11²⁵

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия АФЛЯТОНОВ

Имя: АЙНУР

Отчество: ТАГИРОВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион РТ ТАТАРСТАН

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Афлятонов Айнур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разрежем всю доску на 225 $(\frac{30}{2} \cdot \frac{30}{2})$ квадратов 2×2 (непересекающихся), тогда у нас получились какие-то линии разреза идущие вдоль всего поля (14 вертикальных, 14 горизонтальных), тогда заметим, что в каждом квадрате 2×2 не более 1 короля (иначе они бьют друг друга), тогда раз квадратов 225, а королей 220, то будет ровно 5 свободных квадратов.

Теперь заметим, что в квадрате 9×9 хотя бы 16 квадратов 2×2 (ведь крайние линии разрезов должны быть на чётном расст. друг от друга, если они на расстоянии ≤ 6, то 1 можно сдвинуть, тогда есть полностью разрезанный квадрат 8×8, где тогда хотя бы $4\cdot4=16$ квадратов 2×2), тогда даже если все 5 пустых квадратов 2×2 в этом квадрате 9 на 9, то там всё ещё хотя бы $16-5=11$ королей

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Афлатонов Айнур

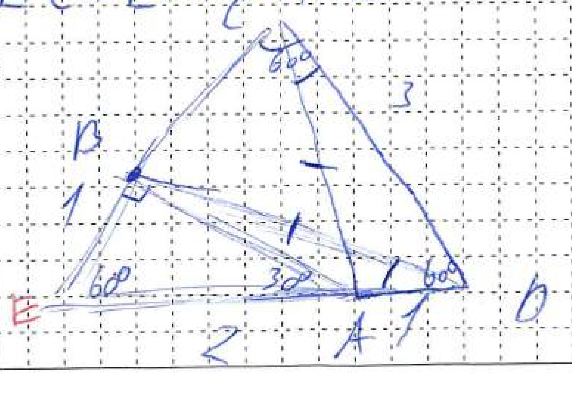
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте продлим AD за точку A на 2, назовем эту точку E, тогда $\triangle EDB = \triangle \overset{DCA}{\cancel{ACD}}$ т.к. ~~$\angle EDB = \angle ADB$~~ $= \angle ACD$. $\angle EDB = \angle ADB = \angle ACD$, $CD = 3 = 2+1 = AE + AD = ED$ и $BD = AC$ (диагонали), тогда раз треуг. равны, то $EB = AD = 1$.

Теперь заметим, что раз $\angle BAD = 150^\circ$, то $\angle BAE = 180 - 150 = 30^\circ$, теперь опустим высоту из E на BA, тогда скажем, что основ. высоты — H, тогда $\angle EHA = 90^\circ$, $\angle EAH = 30^\circ \Rightarrow \angle AHEA = 60^\circ \Rightarrow EH = \frac{1}{2} \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, тогда раз $EH = EB$, то точки H и B совпадают, т.к. ~~единств. точка~~ если есть прямая l с точками K на ней и точка O не на ней, и точка ~~M на прям~~, то $OK = OM \Leftrightarrow K = M$ или K и M симметричны относ. высоты, а при симметрии отн. высоты H перейдёт в себя же), теперь заметим, что раз $\angle AEB = \angle AEH = 60^\circ$, то $\angle ADC$ тоже 60°, т.к $\triangle EDB = \triangle DCA$ тогда раз $ED = 3 = CD$, то CDE — равноб. с углом 60°, т.е равносторонний, т.е $\angle CED = 60^\circ = \angle BED$, тогда т.к $ABCD$ выпуклый B и C в одной полуплоск. отн. ED, тогда E, B и C на одной прямой, и тогда $EC = ED = CD$ (т.к EDC — равносторон.) и ~~BC~~ $BC = EC - EB = 3 - 1 = 2$

Ответ: 2

Рисунок



Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Архипонов Айнур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Для удобства скажем, что~~ Заметим

Пусть $(ab+a+1, bc+b+1)=x$ (под этой записью имеет-
ся в виду НОД), тогда

$(ab+a+1, bc+b+1)=x$

$(ab+a+1-(bc+b+1)\cdot(a+1), bc+b+1)=x$

$(ab+a+1-abc-ab-a-bc-b-1, bc+b+1)=x$

$(-abc-bc-b, bc+b+1)=x$

$(abc+bc+b, bc+b+1)=x$ | НОД $(bc+b+1, b)=1$, потому можно левую часть поделить на b

$(ac+c+1, bc+b+1)=x$,

~~т.е. то~~ тогда аналогично докажем,

что $x=(ac+c+1, bc+b+1)=(ac+c+1, ab+a+1)$ и получим,

что у всех трёх чисел общий НОД

Теперь, пусть частное из условия $-p^2$, тогда

~~хотя бы одно~~ если ровно из них дел. на p

(одно из $(ab+a+1)$ $(bc+b+1)$ $(ac+c+1)$), то

$abc+1$ дел. на произведение двух других

скажем, что $abc+1=k$ $ab+a+1=x$, $bc+b+1=y$,

$ac+c+1=z$, пусть $z\vdots p$, $x, y \not\vdots p$, тогда заметим,

что $kp^2=xyz \Rightarrow k=xy\cdot\frac{z}{p^2}$, если только $z\vdots p$, то

z целое $\Rightarrow k\vdots xy$, но $xy>k$, с вариантами где только

x и только $y\vdots p$ - аналогично $(ab+a+1)(bc+b+1)\geq ab\cdot bc\geq$

$\geq abc$)

Значит ≥ 2 числа $\vdots p$, тогда все 3 дел. на p

(т.к. НОД общий), тогда заметим, что $x\vdots p$, и

$x=(abc+bc+b, bc+b+1)=(abc-1, bc+b+1)$, тогда

~~если~~ $abc-1\vdots x \Rightarrow abc-1\vdots p \Rightarrow$ если $p\neq 2$ $abc+1\not\vdots p$

Задача № 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Афлятонов Айнур

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

, но если $p=2$ и $abc+1 \vdots p \Rightarrow a, b, c$ - нечетные $\Rightarrow$
$ab+a+1 \not\vdots 2 \Rightarrow ab+a+1 \vdots p$ - противоречие, тогда
$abc+1 \not\vdots p$, тогда в уравнении
$(abc+1)\cdot p^2 = (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$
ст. вхождения p в левую часть ≤ 2, в правую ≥ 3,
тогда равенство невозможно - ч.т.д

Ответ: ~~Нет~~ Нет