Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 02

Ответ: 4

Заметим, что так как $1 < k < 7$, таких k может быть ≤ 5.

Докажем, что 5 невозм.

Пусть существует такое n, что для него подходящих k ровно $5 \Rightarrow n$ 2-хорошее и 4-хорошее

~~4~~ 2-хорошее: $n = x + (x+1) = 2x+1 \Rightarrow n \not\vdots 2$

4-хорошее: $n = x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x+6 \Rightarrow n \vdots 2$

Противоречие.

$\Downarrow$

Вася может получить ≤ 4 пятёрок

Пример: $n = 45$

$n = \cancel{2}\cancel{12}\,22 + 23$ — 2-хорошее

$n = 14 + 15 + 16$ — 3-хорошее

$n = 7+8+9+10+11$ — 5-хорошее

$n = 5+6+7+8+9+10$ — 6-хорошее

+КА 7 ?.М

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Ответ: 21

7 каб ⊤ вд

Обозначим кол-во учеников n, кол-во посещаемых каждым кружков k

Для каждого ученика посчитаем кол-во пар кружков, в ~~которые он~~ оба из которых он ходит.

Для каждого это значение будет $\frac{k(k-1)}{2}$

Сложим все значения

Заметим, что каждая пара кружков была посчитана в этой сумме 3 раза, т. к. ровно 3 ученика посещают их оба $\Rightarrow$ сумма будет равна кол-ву пар кружков, умноженная на 3

$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 63$

$n \cdot \frac{k(k-1)}{2} = 63$

$nk(k-1) = 126$

~~$k>1$ и $k \leq 7$, т. к. кружков 7~~

$k \leq 7$, т. к. кружков в школе ровно 7

$k > 1$, т. к. существуют ученики, посещающие оба кружка (для каждой пары кружков)

$k=2$: $n \cdot 2 \cdot 1 = 126 \Rightarrow n = 63 > 60$ — не подх.

$k=3$: $n \cdot 3 \cdot 2 = 126 \Rightarrow n = 21$

$k=4$: $n \cdot 4 \cdot 3 = 126$ — невозм., т. к. $126 \not\vdots 4$

$k=5$: $n \cdot 5 \cdot 4 = 126$ — невозм., т. к. $126 \not\vdots 5$

$k=6$: $n \cdot 6 \cdot 5 = 126$ — невозм., т. к. $126 \not\vdots 5$

$k=7$: $n \cdot 7 \cdot 6 = 126 \Rightarrow n = 3 < 6$ – не подх.

$n = 21$.

Пример: Пронумеруем кружки от 1 до 7 и детей от 1 до 21

1,2,3 ученики посещают 1,2,3 кружки
4,5,6 ученики посещают ~~4~~ 1,4,5 кружки
7,8,9 ученики посещают 1,6,7 кружки
10,11,12 ученики посещают 2,4,6 кружки
13,14,15 ученики посещают 2,5,7 кружки
16,17,18 ~~уч~~ ученики посещают 3,4,7 кружки
19,20,21 ученики посещают 3,5,6 кружки

Назовём группу учеников с номерами $3k+1$, ~~$3k$, $3k$~~ $3k+2$, $3k+3$, $(k \geq 0)$ тройкой

~~В каждой тройке у учеников одинак. набор кружков, при этом ~~ник~~ ни в какой паре кружков не занимаются ученики из разных групп.~~

Пары (1,2); (1,3); (2,3) – у тройки с $k=0$
Пары (1,4); (1,5); (4,5) – у тройки с $k=1$
Пары (1,6); (1,7); (6,7) – у тройки с $k=2$
Пары (2,4); (2,6); (4,6) – у тройки с $k=3$
Пары (2,5); (2,7); (5,7) – у тройки с $k=4$
Пары (3,4); (4,7); (3,7) – у тройки с $k=5$
Пары (3,5); (3,6); (~~3~~5,6) – у тройки с $k=6$

Это все $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ пара, при этом ни в какой паре кружков не занимаются люди из разн. троек $\Rightarrow$ что

7 дп

Докажем:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{\cancel{3}\,1}{1+a+b+c}$$

~~$(a-1)^2(1+a+b+c) - b - c - 1 \overset{?}{\le} 0$~~

~~$(a^2-2a)(1+a+b+c) + a \overset{?}{\le} 0$~~

~~Если $a=0$, левая часть $=0$ — чтд~~

~~Сократим на a~~

~~$(a-2)(1+a+b+c)+1 \overset{?}{\le} 0$~~

~~$a + a^2 + ab + ac - 2(a+b+c) - 1 \overset{?}{\le} 0$~~

$$(a-1)^2 \overset{?}{\le} \frac{b+c+1}{1+a+b+c}$$

$$a^2 - 2a + 1 \overset{?}{\le} 1 - \frac{a}{1+a+b+c}$$

$$a^2 - 2a + \frac{a}{1+b+c+a} \overset{?}{\le} 0$$

Если $a=0$ — чтд

Иначе сократим на a

$$a - 2 + \frac{1}{1+a+b+c} \overset{?}{\le} 0$$

$$\frac{1}{1+a+b+c} \le \frac{1}{1+a}$$, т.к. $b \ge 0$ и $c \ge 0$

$$\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+a+b+c} = \frac{b+c}{(1+a)(1+a+b+c)} > 0$$

$$a + \frac{1}{1+a} \overset{?}{\le} 2$$

$$a^2 + a + 1 - 2a - 2 \overset{?}{\le} 0$$

$$a^2 - a - 1 \overset{?}{\le} 0$$

$$a^2 - a \overset{?}{\le} 1$$

$$a^2 - a = b - b^2 + c - c^2$$

~~$b - b^2 = b(1-b)$~~

Задача № 3 Лист 2 из 2 Номер участника: 02

~~$b - b^2 \quad -b^2+b+0$ — кв. трёхчлен~~

~~Вершина этой параболы — при~~

$$-b^2+b = \underbrace{-(b-0{,}5)^2}_{\leqslant 0} + 0{,}25 \leqslant 0{,}25$$

Тогда $a^2-a \leqslant 0{,}5 < 1$ /чтд

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leqslant \frac{1}{1+a+b+c}$$

$$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \leqslant \frac{1}{1+a+b+c}$$

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leqslant \frac{1}{1+a+bc}$$

Сложим:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \lesseqgtr \frac{3}{1+a+b+c}$$

/чтд

+ ИМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 02

2 Ап

Оценка на 250:

Пусть n — кол-во различных направлений звеньев

Если $n \neq 2$, то есть направление, перпендикулярно которому звеньев нет $\Rightarrow k=0$

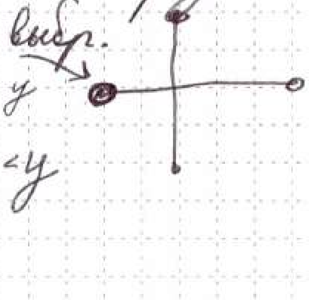
Если $n=2$, то направления звеньев ~~по~~ чередуются по обходу ломаной

для каждого конца звена есть звенья содерж. его и паралл. обоим напр.

Рассмотрим систему координат, ось X которой параллельна одному из направлений, ось Y — другому.

Выберем конец звена, т.ч. его коорд. по оси Y мин., среди таких — с мин. коорд. по оси X.

Заметим, что тогда звено из этого конца, параллельное оси X, не пересекается ни одним перп. звеном, иначе есть конец звена, у которого коорд. по оси ~~X~~ Y меньше — пр-чие



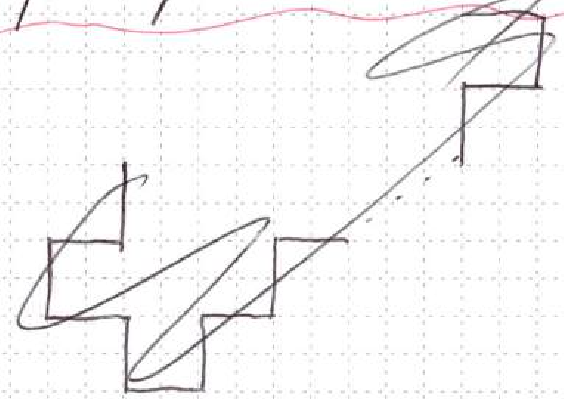
Тогда $n \geq 4 \Rightarrow$ есть направление, звеньев, парал. которому, $\leq 250 \Rightarrow$ ~~перп. ему направление~~

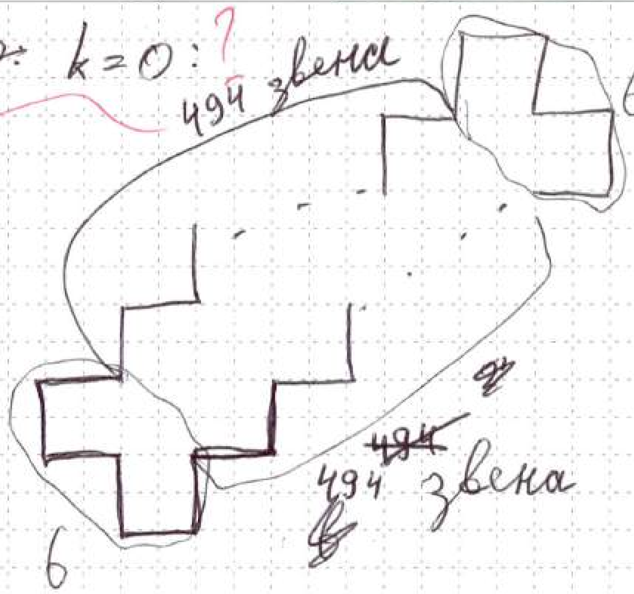
звенья, соотв. перпенд. направлению (если такого нет, ~~и~~ $k=0$) пересекает ≤ 250 звеньев чтд

Оценка OK

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 02

Пример на ~~4зо~~ $k=0$: ?





Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 02

Заметим, что в каждом квадрате 2×2 может быть ≤ 1 короля.

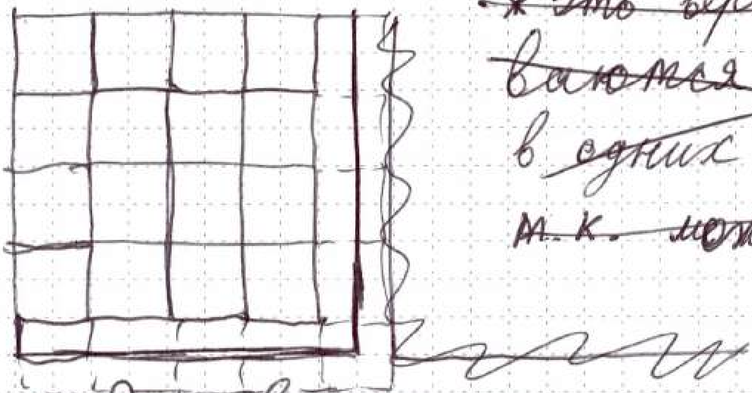
Разделим доску на квадраты 2×2

Их будет $15\cdot15=225 \Rightarrow$ ~~в ≤5~~ в ≤ 5 квадратах нет королей, в ост. – есть

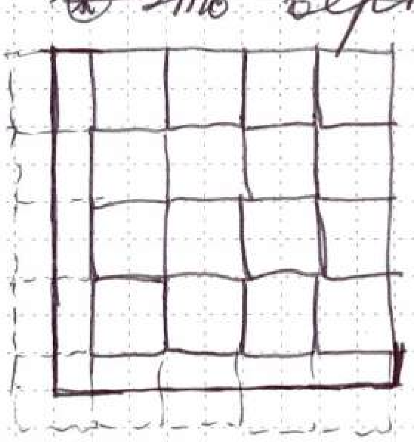
В квадрате 9×9 при любом его расположении на доске будет ≥ 16* ~~$\ge [\frac{9}{2}]\cdot[\frac{9}{2}] = 16$*~~ квадратов 2×2. В ≥ 11 из них есть король.

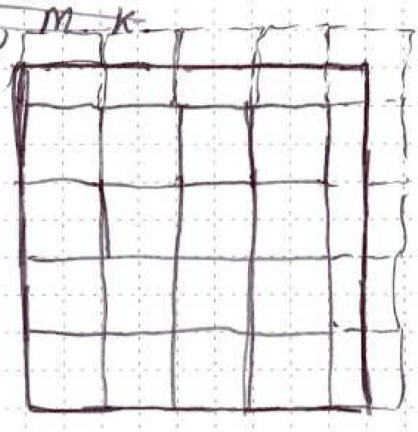
~~* Это верно, т.к. столбцы разбиваются на пары лежащих в одних кв. 2×2, и в кв. 9×9~~

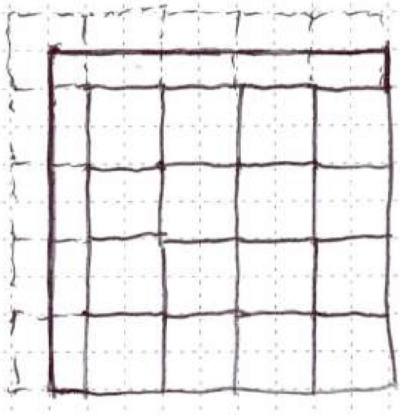
~~т.к. может быть~~



~~* Это верно, т.к.~~





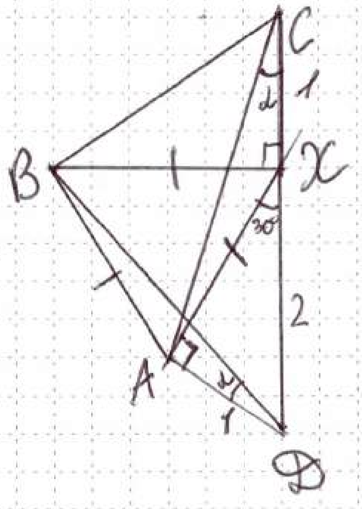


Выше приведены все возможные расположения кв. 9×9 в разделении. Это все, т.к. левый верхний угол ~~кв. 2×2 угол~~ этот ~~содержит ≥1 кл. кв. 2×2~~ может быть одной из четырёх возм. кл-к в соотв кв. 2×2

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

~~№6~~

Отметим на отрезке CD такую точку X, что $CX = 1$



$XD = CD - XD = 2$

$\triangle ACX \overset{I}{=} \triangle BDA$:

~~$AD = CX$~~ $AC = BD$

~~$BD = AC$~~ $CX = AD$

$\angle ADB = \angle ACX$

$\Downarrow$

$\angle BAD = \angle AXC = 150^\circ$; $AB = AX$

$\Downarrow$

$\angle AXD = 30^\circ$

$\angle ABX = \angle BXA = \dfrac{180^\circ - \angle BAX}{2}$

По т. синусов: $XD = 2$

$$\frac{XD}{\sin\angle XAD} = \frac{AD}{\sin\angle AXD} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$\frac{2}{\sin\angle XAD} = 2, \quad \angle XAD < 150^\circ \Rightarrow \angle XAD = 90^\circ$$

Тогда $\angle BAX = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, $AB = AX \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BAX$ – равностор. $\Rightarrow AX = BX$

$\angle BXC = 180^\circ - \angle BXA - \angle AXD = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

$\triangle AXD = \triangle XBC$:

$$\left.\begin{aligned} AX &= BX \\ AD &= XC \\ \angle BXC &= \angle XAD \end{aligned}\right\} BC = XD = 2$$

Ответ: 2

$+$ 5 п

7 ик

+ В1

7 мм

Представим $abc+1$ в виде $k\cdot l\cdot m$, т.ч.

$ab+a+1 \vdots k$ Их произв. $\vdots$ ~~klm~~ $abc+1$

$bc+b+1 \vdots l$ $\Downarrow$ Так сделать можно

$ac+c+1 \vdots m$

$ab+a+1 = a_1 k$ Пусть $a_1 b_1 c_1 = p^2$ a_1, b_1, c_1 – дел. p^2 $\Downarrow$ $=1, p$ или p^2

$bc+b+1 = b_1 l$ 1° 2 из этих чисел $=1$

$ac+c+1 = c_1 m$ Не умаляя общности, $a_1=b_1=1$

$\Downarrow$

$$abc+1 \vdots (ab+a+1)(bc+b+1)$$

$$\parallel$$

$$ab^2c + ab^2 + ab + abc + ab + a + bc + b + 1$$

$$\vee$$

$$abc+1 \text{ – пр-тие}$$

Тогда не умаляя общности $a_1 = b_1 = p$, $c_1 = 1$ (Др. разбиений p^2 на 3 натур. множителя, т.ч. ≤ 1 из них $=1$ нет) – если есть p^2, то это 1°, иначе есть только 1 и $p \Rightarrow$ $\Rightarrow$ 2 числа $= p$, 1 — 1

$ab+a+1 \vdots p$ ~~$\Rightarrow abc+ac+c \vdots p$~~

$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow abc+ab+a \vdots p$

~~$abc-1 \vdots p$~~ $abc+ab+a-ab-a-1 \vdots p$

~~$\left[\begin{array}{l} abc=1 \\ abc=p-1 \end{array}\right.$~~ $abc-1 \vdots p$

$abc+ac+c \vdots p \Rightarrow ac+c+1 \vdots p$

$abc+1 \vdots ac+c+1$ (см. выше)

$\Downarrow$

$abc+1 \vdots p$

$\Downarrow$

$p=2 \Rightarrow p^2=4$

$$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) > a^2b^2c^2 + 2abc + 1,$$

(где $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = p^2(abc+1)$, $a^2b^2c^2+2abc+1 = (abc+1)^2$)

т.к. эти слаг. есть при раскр. скобок, и все получаемые слаг. >0

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 02

Тогда $p^2 > abc+1 \Rightarrow abc<3$

~~Такое~~

1° $abc=1 \Rightarrow a=b=c=1$

$$\left.\begin{array}{l} ab+a+1=3 \\ bc+b+1=3 \\ ac+c+1=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} abc+1=2 \\ 27 \not\vdots 2 - \text{не подх.} \end{array}$$

2° $abc=2 \Rightarrow$ Не умаляя общности (выражение цикл. симм.), $a=2$, $b=c=1$

$ab+a+1=5$ $\quad abc+1=3$

$bc+b+1=3$

$ac+c+1=4$

~~$3\cdot4\cdot5 \vdots ?$~~

$3\cdot4\cdot5=60$

$60:3=20 \neq p^2$ — не подх.

Ответ: не может

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 02

Если рассм. любые 2 непересек.
~~ра~~ группы по 24 гири, ост. 2 гири – обозначим их а и в.
Сумм. вес групп – k и l соотв.

$\Downarrow$

$|k-l| \le a+в$, иначе для одной из групп не выполн. усл.

О

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!