

① Пример. ответ: 4.

Число 45 является 2-, 3-, 5-, 6-хорошим: это

$$45 = 22 + 23$$

$$45 = 14 + 15 + 16$$

$$45 = \cancel{6+7+8} + 7+8+9+10+11$$

$$45 = 5+6+7+8+9+10$$

Оценка. Очевидно, Вася получил ≤ 5 номеров (натур. шёл строго между 1 и 7-5).

Пусть возможно $n \in \mathbb{N}$, которое 2-, 3-, 4-, 5-, 6-хорошее одновременно, т.е.:

$\exists a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$:

$$n = a+(a+1) = b+(b+1)+(b+2) = c+(c+1)+(c+2)+(c+3) = \dots$$

$$\Rightarrow 2a+1 = n = 4c+6 = 2(2c+3)$$

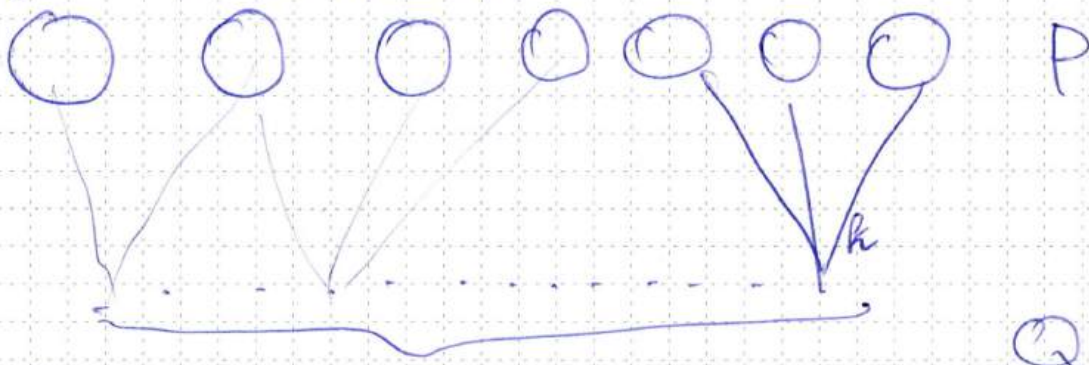
Значит, n одновременно чётно и нечётно, противоречие.

② Ответ: Зам 21.
 Рассмотрим двудольный граф B :
 мн-во вершин одной доли - P - кружки
 мн-во вершин другой доли - Q - ученики.

ab - ребро, если \iff ученик b ходит в кружок a .

Пусть $v \in Q$ k вершин.

$\begin{matrix} + \\ \hline \end{matrix}$ $\begin{matrix} \bullet \\ \hline \end{matrix}$ $\begin{matrix} \bullet \\ \hline \end{matrix}$
 $BA \quad BKA$



Тогда по условию каждой ученик Q посещает одно и то же k -во кружков, пусть k .

тогда $\forall x \in Q \deg(x) = k$.

Посчитаем k -во ребер между P и Q , пусть их E_{PA} .

С одной стороны, $E_{PA} = nk$.

С другой ст.е!) $E_{PA} = \frac{C_7^2 \cdot 6}{k-1}$.

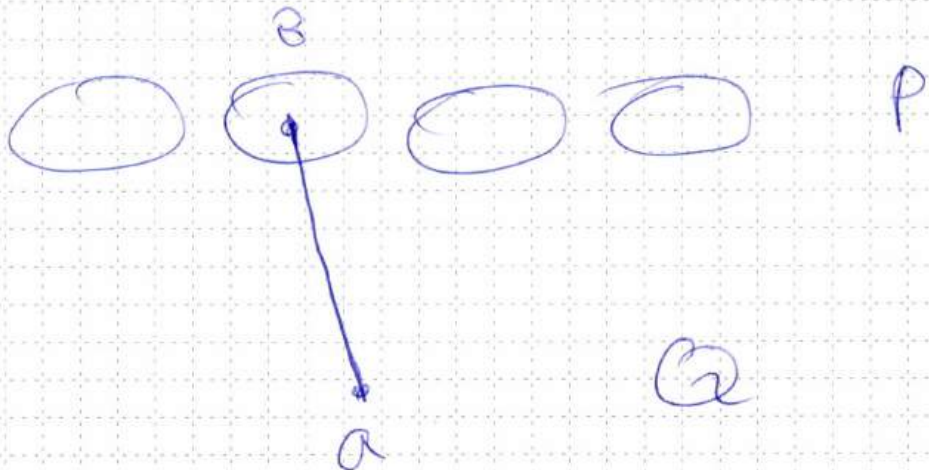
Рассмотрим всевозможные пары вершин P . По усл. для каждой пары $A, B \in P$
 $\exists! c, d, e \in Q$ такие, что cA, cB, dA, dB, eA, eB - ребра.

Посчитаем для каждой пары верш. из P эти мажор. ребра.

Мы насчитаем $C_7^2 \cdot 6$ ребер.

пар верш. в P # реб. для каждой пары

Покажем, что каждое ребро ab считается $k-1$ раз.



Посчитаем такое ребро только для пар $\{b, c\}$ вида bc , где $c \in P$.

А таких пар - $k-1$ (всех верш. P , смежных с a , кроме b).

Значит,
$$E_{pa} = \frac{C_7^2 \cdot 6}{k-1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 6}{2(k-1)} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 7}{k-1}$$

k k

$$\Rightarrow \sum_{b \in P} k(k-1) = 3^2 \cdot 7 \cdot 2$$

Проверим возможные значения k .
 (k от 0 до м.к. кружков
 (верш. P) - 7).

$k=0: n \cdot 0 \cdot (-1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad X$

* по условию,
 $n > 6$ и $n < 60$

$k=1: n \cdot 1 \cdot 0 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad X$

$k=2: n \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow n = 3^2 \cdot 7 = 63 \geq 60 \quad X$

$k=3: n \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow n = 21 \quad \checkmark$

$k=4: n \cdot 4 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, но левая часть: $4 \cdot n$
 правая: $4 \cdot 3 \cdot n$ X

$k=5: n \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, но $1 \cdot 4 \cdot 5 \neq 5$, $n \cdot 4 \neq 5 \cdot n \quad X$

$k=6: n \cdot 6 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $1 \cdot 4 \cdot 5 \neq 5$, $n \cdot 4 \neq 5 \cdot n \quad X$

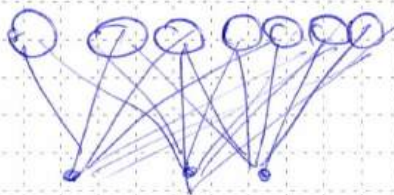
$k=7: n \cdot 7 \cdot 6 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow n = 3 \quad \checkmark$ k > 6

Значит, либо $n=3$ и $k=7$, либо $n=21$ и $k=3$.

Примеры.

$n=3$:

Любой ученик ходит в любой кружок



\Rightarrow для \forall пары кружков в оба ходят все три ученика

$n=21$:

Кружок \ Ученик	1	2	3	4	5	6	7
A	1	1	1	0	0	0	0
B	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	0	0	0	1	1
D	0	1	0	1	0	0	1
E	0	1	0	0	1	1	0
F	0	0	1	0	1	0	1
G	0	0	1	1	0	1	0

В таблице:

ученик i ходит на кружок $j \Leftrightarrow$

в клетке строки i столбца $j-1$,
в ином случае - 0.

Возьмём n учеников каждого типа -
 $3 \times A, A \times 3, B \times 3, \dots, G \times 3$.

(!) получился корректный пример.

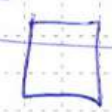
(!) для пары кружков i, j оба посещают
только 3 чел.

\Rightarrow в исходной таблице есть только
одна строка, в поз. i -м и j -м
столбцах единицы.

это верно. Проверится на большем
переборе.

пара i, j	в какой строке вектор.
1 2	A
2 3	A
3 4	B
4 5	B
5 6	B
6 7	B
7 1	B
1 3	A
2 4	B
3 5	B
4 6	B
5 7	B
6 1	B
7 2	B
1 4	B
2 5	B
3 6	B
4 7	B
5 1	B
6 2	B
7 3	B

Каждая пара i, j посещают
2 чел. по
вместе
A всего пар единичек - $3 \cdot 7 = 21$
 \Rightarrow каждая пара посетит ровно
единичку.



③ $a, b, c \geq 0$
 $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$

$\sum_{i=1}^n n$
 СИМ.

(.) $\sum_{\text{сим}} \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{3}{1+a+b+c}$

(!) $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \stackrel{(i)}{\leq} \frac{a^2 - a + 1}{a+b+c+1}$ умножим на знаменатель (> 0)

\Downarrow ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (i) пог. звездочкой!

$(a-1)^2(a+b+c+1) \leq (a^2 - a + 1)(b+c+1)$

~~$(a^2 - 2a + 1)(a+b+c+1) = (a^2 - a + 1)(b+c+1)$~~

~~$a^3 + a^2b + a^2c + a^2 - 2a^2b - 2a^2c - 2a + ab + bc + c + 1 \leq a^2b + a^2c + a^2 - ab - ac - a + b + c + 1$~~

~~$a^3 - 2a^2 - 2ab - 2ac = a \leq ab - ac = a$~~

~~$a^3 \leq 2a^2 + ab + ac$~~

~~$\Downarrow a > 0$~~

~~$a^2 \leq 2a + b + c = a + (a+b+c) = a + a^2 + b^2 + c^2$~~

$\Downarrow 0 \leq a + b^2 + c^2$, верно.

Проецируем неравенство (i) на
 всевозможными
 перестановками a, b, c , получим

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{(a^2-a+1) + (b^2-b+1) + (c^2-c+1)}{a+b+c+1}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c) + 3}{a+b+c+1} = \frac{3}{1+a+b+c}$$

Это и есть исходное неравенство.
 Конец!

* Оказывается, (i) можно доказать
 иначе:

$$(a-1)^2 = x$$

$$a+b+c+1 = s$$

$$(1) \quad x \leq (x+a)(s-a) = xs + as - ax + a^2$$

$$(2) \quad ax \leq as + a^2 \leftarrow x \geq 0 \leftarrow \text{если } x=0, \text{ равенство}$$

$$x \leq \frac{s+a}{2}$$

$$a^2 - a + x \leq a + b + c + 1 + a$$

$$a^2 \leq a + b + c + 2a = a^2 + b^2 + c^2 + 2a$$

$$0 \leq b^2 + c^2 + 2a, \text{ верно}$$

④ Ответ: 250. ~~к~~
 Оценка на 250 — (!) $k \leq 250$

Заметим, что у любого звена есть (считая его) $\geq k$ звеньев, паралл. ему: +сб

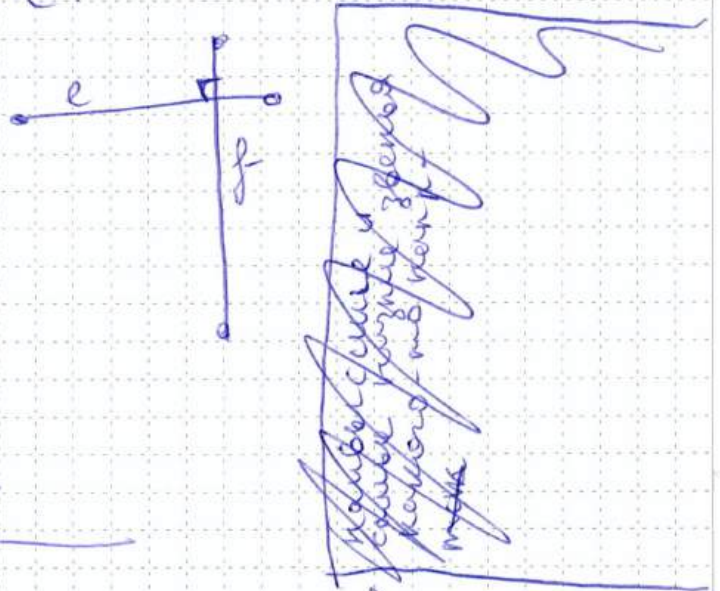
Ему:

Рассмотрим звено e .

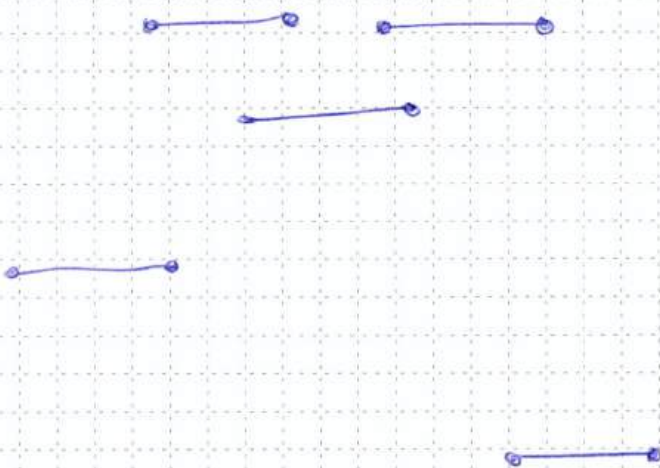
Есть перпендикулярное ему звено f .

А звену f есть $\geq k$ перпенд. звеньев

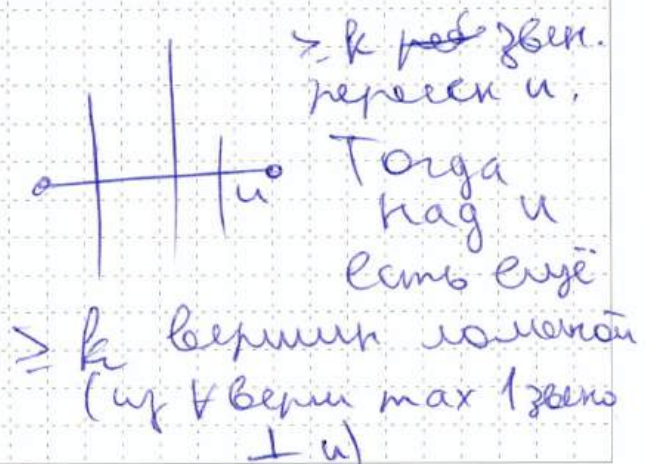
$\Rightarrow \geq k$ звеньев, паралл. e .



Рассмотрим k каких-нибудь параллельных звеньев.



Пусть u — одно из максимальных ~~перпенд~~ ^{звеньев} ~~макс~~ направлений.



Аналог, ^{над} над самыми нижними звеньями ~~идея~~ такого направления есть $\geq k$ вершин ломаной.

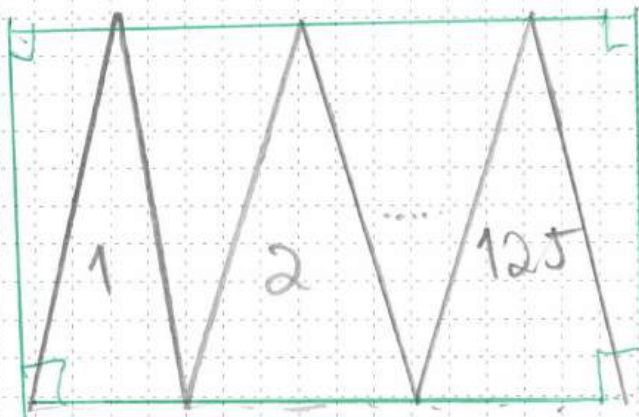
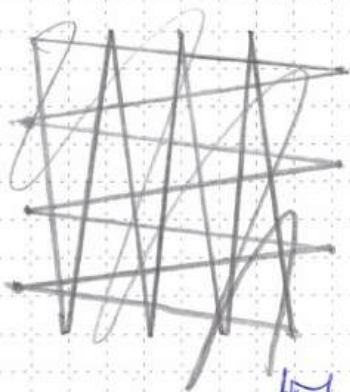
Значит, всего вершин ломаной $\geq 2k + k + k = 4k$.

концы
ребер
данного
направления

$$\Rightarrow k \leq \frac{1000}{4} = 250$$

Пример
на 25°

Рассмотрим следующую
конструкцию:



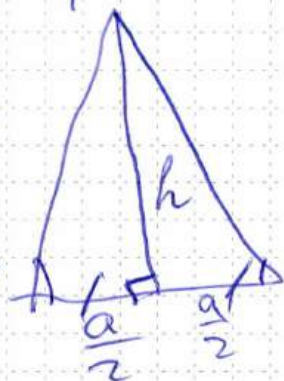
Часть ломаной —
125 равных n/δ треугольников
с общей краевой основой.

~~Доведёмся того, чтобы~~

(!) Можно построить конструк-
цию так, чтобы если вставить
ее в ~~квадрат~~ ^{прямо-к}, проведем ^{через} ^{вершине}
верш. n/δ Δ параллельно ^{краевой}
основанию и через крайние боковые
верш. ^{краевые}, перпенд. основанию
(как на рисунке), этот
прямо-к \square окажется квадратом.
Боковые ст. ^{краевые} равны высоте
 h одного n/δ Δ . Другие боковые
ст. ^{равны} ~~равны~~ ¹²⁵ в 125 раз
больше основанию a одного n/δ Δ .

1) Существует $\triangle ABC$ с осн. a и высотой h такой, что $h = 125a$.

$$h = 250 \cdot \frac{a}{2}$$



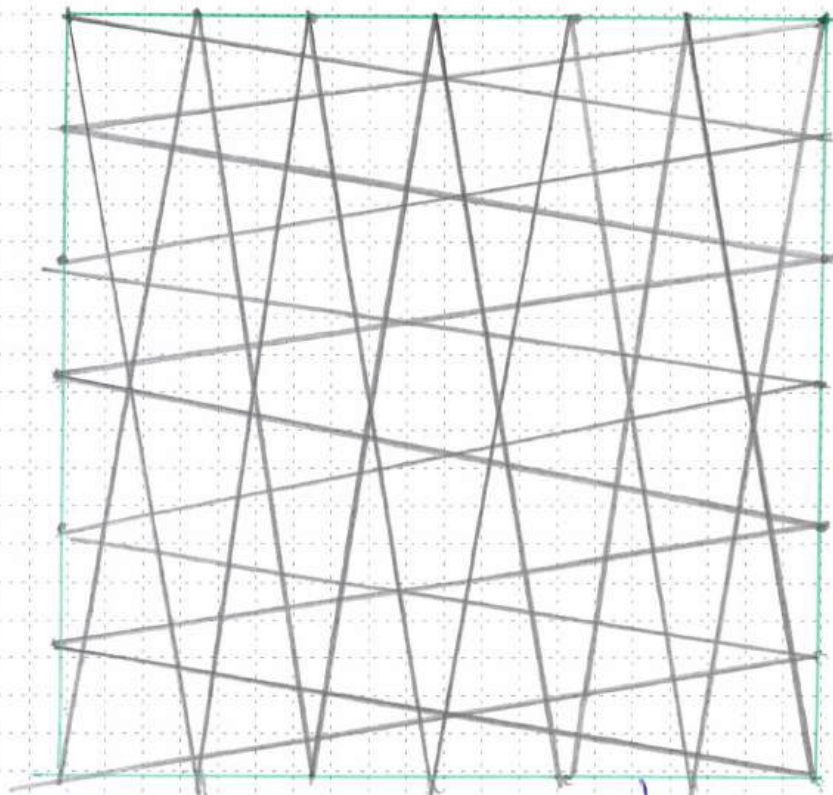
Существует $\triangle ABC$ с катетами $h, \frac{a}{2}$. ~~Смешан дв.~~

От симметрии его отрез. катета длиной h . Получим $\triangle ABC$.

Итак, мы построили кусок ломаной из ~~250~~ 250 равных звеньев, вписанной в квадрат. Давайте нарисуем ^{концы палки,} ~~этого~~ ^{невероятные} этот кусок ~~отрез.~~ ~~этого~~ центра квадрата на углы $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

~~Получимся~~

Очевидно, нарисуем замк. ломаная на 1000 равных звеньях.



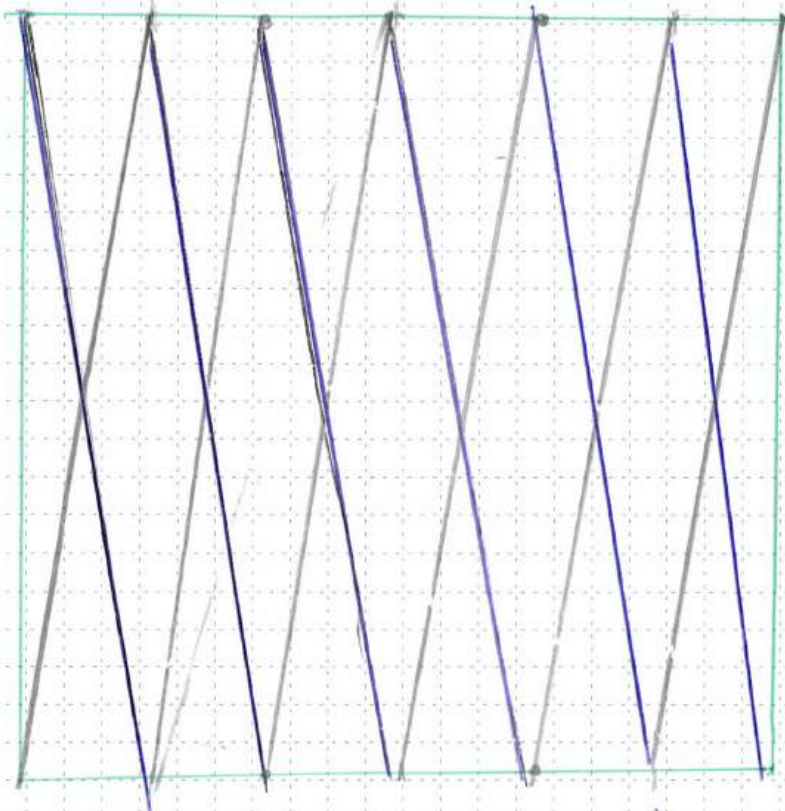
Образовались ~~прямые~~ два класса прямых (если идти по ломаной и красить звенья по очереди то в черной, то в белой, то белые прямые одного класса,

чёрные - другого).

Прямая в каждом классе есть две группы по 250 парам параллельных ~~прямых~~^{звеньев}, и каждая ~~прямая~~^{звено} из одной группы класса пересекает по 250 ~~прямых~~^{звеньев} другой группы класса под прямым углом.

Все эти рассуждения очевидны из построения картинки:

Если посмотреть только на 1/5 треугольнички построения с основанием m на канат-то из двух ~~прямых~~^{звеньев} перпендикулярных сторон квадрата, получаются два множества ^{из 250 парных} ~~прямых~~^{звеньев}.



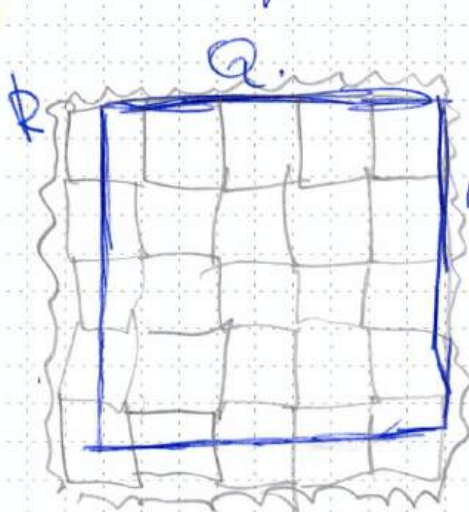
Значит, если мы рассмотрим эти звенья, повернутое отное. Центры кв-та на 90° , там будут 250 ~~кв~~ звеньев, перпенд. звеньями первого множества

и 250 звеньев, \perp звеньями второго множества, и все перпенд. звенья пересекаются внутри квадрата.

Мы оценили $k \leq 250$ и построили пример, когда $k = 250$. Значит, мы решили задачу, получив ответ — max возможное значение $k = 250$.

Победа!

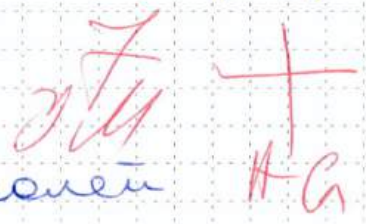
От метки на \mathbb{Z} квадрат 9×9 , в клет. \leq юкер
 5) Разобьём всю доску на квадратики 2×2 . Тогда квадрат Q покрывает их следующим образом (с точностью до поворота на угол $k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbb{N}$):



Пусть квадрат R состоит из всех квадрати-ков разбиения, которые покрывает Q .
 В каждом кв-те разбиения ≤ 1 кор.

Тогда в $R \leq 10 + 9$ королей

\nearrow max королей в Q \uparrow max королей в квадратах, не полностью покрытых Q .



Тогда на всей доске

$\leq 19 + 15^2 - 5^2$ королей = 219 королей.
 но их 220.
 Противоречие.
 Значит, в \forall кв-те $9 \times 9 \geq 11$ королей.

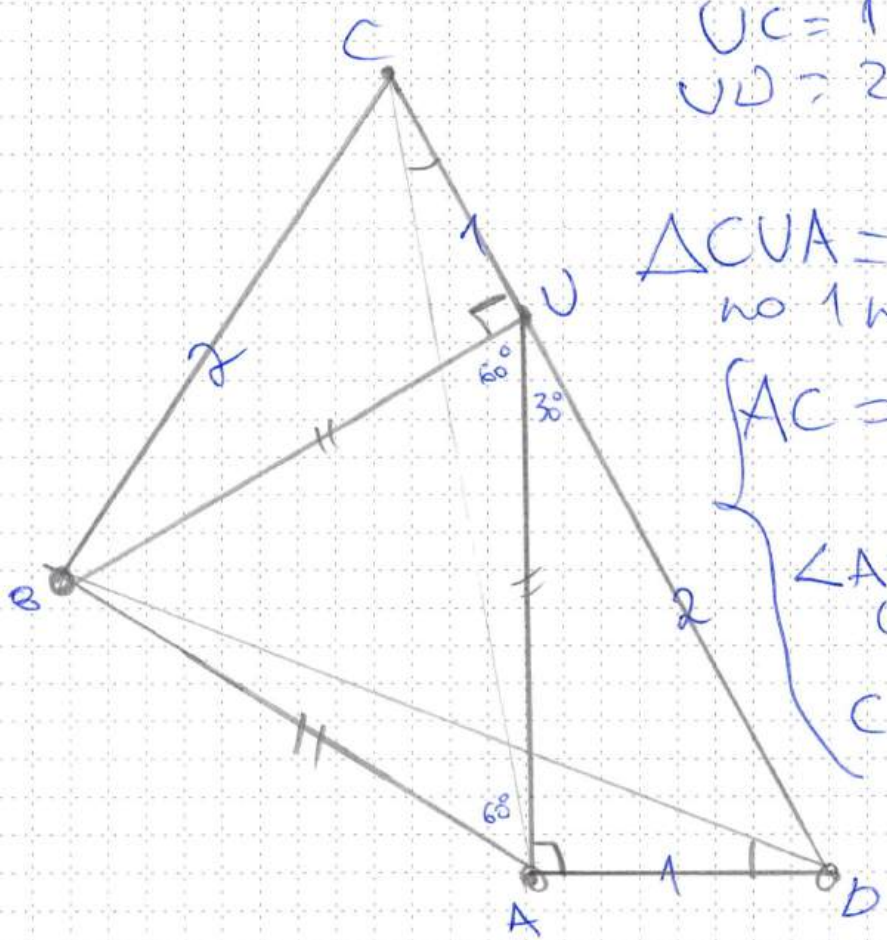
\nearrow max королей в R \uparrow всего кв-тов разбиения \uparrow кв-тов разбиения из R

Мы можем написать такую оценку, т.к. в \forall кв-те разбиения ≤ 1 король.

6. Ответ: 2

Доп. построение
 U — на отрезке CD :

$UC = 1$
 $UD = 2$ *см* $7_{ик}$



$\triangle CUA = \triangle DAB$
 по 1 признаку:

$AC = BD$ (даны равны)

$\angle ACU = \angle BDA$
 (условие)

$CU = DA = 1$.

$\Rightarrow \angle CUA = \angle DAB = 150^\circ$, и $UA = AB$

$\Rightarrow \angle AUD = 180^\circ - \angle AUC = 30^\circ$

В $\triangle AUD$ $UD = 2AD$, $\angle AUD = 30^\circ \Rightarrow \angle UAD$ *прямой*.

$\Rightarrow \angle BAC = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$

$\triangle ABU$ *р/д*, и у него есть угол 60°

$\Rightarrow \triangle ABU$ *р/с*.

$\Rightarrow BU = UA$.

Тогда $\triangle CUB = \triangle DAU$ по 1 критерию:

$$\left\{ \begin{array}{l} CU = DA = 1 \\ \angle CUB = 180^\circ - \angle BUA - \angle AUB = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ = \\ = \angle DAU \\ UB = AU \end{array} \right.$$

$\Rightarrow BC = UD = \underline{\underline{2}}$ победа.

Еще одно г-во от м. центра описанной окружности $\triangle AUB$ и почитаемый

⊛ Это утверждение верно например из теоремы синусов для $\triangle AUB$, или из следующего рассуждения:

Построим $\triangle A'U'D'$ такой, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle A' = 90^\circ \\ \angle U' = 30^\circ \\ A'D' = 1. \end{array} \right.$$

Тогда по свойству \triangle с углами $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, катет $U'D'$ вдвое больше $A'D' \Rightarrow UD = 2$. *каждый квадрат*

Тогда $\triangle A'U'D'$ и $\triangle AUB$ почти равны:

$$\left. \begin{array}{l} A'D' = AU = 1 \\ U'D' = UB = 2 \\ \angle A'U'D' = \angle AUB = 30^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Значит, либо } \angle UA'D' = \angle UAD' \\ \text{либо } \angle UA'D' + \angle UAD' = 180^\circ \\ \text{В любом случае } \angle UAD = 90^\circ. \checkmark \end{array}$$

⑦ Лемма. Если какие-то два числа из $ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1$ делятся на натуральное m , то и третье тоже делится. (x, y) - НОД x и y

Доказательство.

НЧО $ab+a+1 \equiv m$ и $bc+b+1 \equiv m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(b+1) \equiv -1 \pmod{m} \\ b(c+1) \equiv -1 \pmod{m} \end{cases}$$

Тогда $(a, m) = 1$
 $(b+1, m) = 1$
 $(b, m) = 1$
 $(c+1, m) = 1$

$$\Rightarrow b \equiv -\frac{1}{a} - 1 \equiv -\frac{a+1}{a} \pmod{m}$$

$$b \equiv -\frac{1}{c+1} \pmod{m}$$

Можем писать про модуль так как знаменатели взаимно просты с модулем

$$\Rightarrow \frac{1}{c+1} \equiv -b \equiv \frac{a+1}{a} \pmod{m}$$

$$\Rightarrow a \equiv (a+1)(c+1) = ac + a + c + 1 \pmod{m}$$

$$0 \equiv ac + a + c + 1 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow ca + c + 1 \equiv m, \text{ доказано.}$$

2 а. д.р.

Какие-то два из x, y, z по лемме
Терико не делятся на p , н.ч. x, y .

Тогда $\downarrow x$ и $\downarrow y$ взаимно просты
с $p \Rightarrow$ м.к. $\left. \begin{array}{l} (abc+1)p^2 : dx \\ (abc+1)p^2 : dy \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} abc+1 : ab+a+1 \\ abc+1 : bc+b+1 \end{array}$

В обоих случаях мы докажем,
что ~~$abc+1$~~ $abc+1$ дел. на какие-то
два из $ab+a+1, bc+b+1, ca+c+1$.
Н.ч. на $ab+a+1, bc+b+1$.

$$\left. \begin{array}{l} abc+1 : ab+a+1 \\ c(ab+a+1) : ab+a+1 \\ \text{"} \\ abc+ac+c \end{array} \right\} \Rightarrow ac+c-1 : ab+a+1$$

$$\left. \begin{array}{l} abc+1 : bc+b+1 \\ a(bc+b+1) : bc+b+1 \\ \text{"} \\ abc+ab+a \end{array} \right\} \Rightarrow ab+a-1 : bc+b+1$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c-1 : ab+a+1 \\ ab+a+1 : ab+a+1 \end{array} \right\} \Rightarrow ab+a+c : ab+a+1$$

$$\left. \begin{array}{l} ab+a-1 : bc+b+1 \\ bc+b+1 : bc+b+1 \end{array} \right\} \Rightarrow ab+a+bc+b : bc+b+1$$

$$\begin{aligned} &\text{Вспомним, что } \text{НОД}(ab+a+1, a+c+1) = \\ &= (ab+a+1, bc+b+1) = (bc+b+1, a+c+1) = d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ab+a+c : d \\ (ab+a+1) + (bc+b+1) : d \end{array} \right. &\Rightarrow 2 : d \\ &\Rightarrow d - \text{делит } 2, \text{ делит } 1. \end{aligned}$$

Если $d=2$:

$$\begin{aligned} ab+a+1 &: 2 \\ bc+b+1 &: 2 \end{aligned}$$

~~То есть $a(b+1)$ и $b(b+1)$~~

То есть $a(b+1)$ и $b(b+1)$ - нечетные числа.

Но либо b , либо $b+1$ четно
Противоречие.

Значит, $d=1$. $\Rightarrow ab+a+1, bc+b+1, ca+c+1$
попарно взаимно
просты.

8. Ответ: не может такого суммирования

Решение

Пусть такое и вправду произошло.

Весы ширь - $a_1 > a_2 > \dots > a_{50} > 0$.

Тогда существуют i_1, \dots, i_n и j_1, \dots, j_m такие, что:

$$50 \geq i_1 > i_2 > \dots > i_n \geq 25$$

$$26 \geq j_1 > j_2 > \dots > j_m \geq 1$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{24} = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$$

$$a_{27} + a_{28} + \dots + a_{50} = a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_m}$$

Примем $26 \geq n \geq 25$

$$1 \leq m \leq 23$$



макс как $\forall w \in m 27 \dots 50$

$\forall v \in m 1 \dots n$

$$a_w < a_{j_v}$$

макс как $\forall s \in m 1 \dots 24$
 $\forall t \in m 1 \dots n$

$$a_s > a_t$$

1 сл.

$n = 25$. Тогда $a_1 + \dots + a_{24} = a_{50} + \dots + a_{27} + a_t$
 где $t = 25$ и 26 .

либо $\delta) a_1 + \dots + a_{24} = a_{j_0} + \dots + a_{24} + (a_{26} + a_{25}) - a_5$
~~где $S_0 = m + 24$~~ где S
 от 27 до 30.

а) $\{ a_1 + \dots + a_{24} = a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_m} + a_f, m \leq 23$

\Rightarrow чисел справа ≤ 24 , и среди них есть a_f , которое меньше всех чисел слева. \checkmark
 Противоречие.

$\delta) a_1 + \dots + a_{24} = a_{j_1} + \dots + a_{j_m} + a_{26} + a_{25} - a_5$

$a_1 + \dots + a_{24} + a_5 = a_{j_1} + \dots + a_{j_m} + a_{26} + a_{25}$
4?

2a $n = 26$

$$a_1 + \dots + a_{24} = a_{25} + a_{26} + a_{27} + \dots + a_{30} =$$

$$= a_{25} + a_{26} + a_{j_1} + \dots + a_{j_m}$$

Пусть a_1, a_3, \dots, a_{29} находятся
 в белых; a_2, a_4, \dots, a_{30} — в черной.
 Будем брать одноцветные
 наборы по 24 шри.

~~Арсени~~

00000 ~ 0