Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 05 7 А Ел

Ответ: 4

Пример: $n=45$. $22+23=45$

$14+15+16=45$

$7+8+9+10+11=45$

$5+6+7+8+9+10=45$

Оценка Если число и 2-хорошее и 4-хорошее $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} n &= a_1+a_1+1 = 2a_1+1 = \text{неч} \\ n &= a_2+a_2+1+a_2+2+a_2+3 = 4a_2+6 = \text{чёт} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ?!$$

$\mathcal{D}^+ \mathcal{M}$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 2 Номер участника: 05

7каб +

Если ∀ ученик занимается в 2 кружках ровно, то нужно ~~ее~~ = 63 ученика, т.к всего пар кружков $\frac{7\cdot6}{2}=21$ пара и для ∀ пару нужно 3 ученика, $21\cdot3=63$, но $63>60$.

Если ∀ ученик занимается в 3 кружках ровно, то нужно = 21 человек, т.к ~~∀ ученик до всего и пара~~. ~~в пару ровно 3 раза~~.

Заведём ~~граф~~ двудольный граф.

1 доля (вершины) - ученики

2 доля (вершины) - пары занятий кружков

ребро если ученик посещают ~~ее~~ и занятие А и занятие В, то от него (ученика) ведётся ~~пара~~ ребро в пару занятий АВ. В ∀ пару ведётся 3 ребра ⇒ ~~из~~ всего ребер - $21\cdot3=63$ ребра ⇒ Если ученик занимается в 3 кружках, то из него выходит 3 ребра ⇒ $\frac{63}{3}=21$ человек.

Пример Разобьем все пары занятий по 7 группам по 3 пары в ∀ группе. ~~Тогда~~ Так чтобы в ∀ группе были пары AB, BC, CA, то есть всего используется 3 занятия: Такие тройки: ABC, ADE, ACF, BDF, BEG, CDG, EEF, CG

AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, GB, DE, DF, DG, EF, EG, FG. И для ∀3 в 3 ученика занимаются именно этим тройкам.

Если ∀ ученик занимается в 4 кружках ~~занятиях~~, то всего из ~~нее~~ каждого ~~ученика~~ ученика ведёт 6 ребер, а $63 \not\vdots 6$

Если ∀ ученик занимается в 5 кружках ~~занятиях~~, то всего из каждого ~~ученика~~ ведёт 10 ребер, а $63 \not\vdots 10$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 2 из 2 Номер участника: 03

Если $\forall$ ученик занимается в 6 кружках, то всего из каждой вершины 15 рёбер, а $63 \not\vdots 15$.
Если $\forall$ ученик занимается в 2 кружках, то всего из каждого выходит 21 ребро, но $63:21=3$, а $3 \neq 6 \Rightarrow$?! Ответ: 21 ученик

Пропущен случай — 1 кружок и 0 кружков

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 05

Идея 1:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+(2ab+2bc+2ac) \Rightarrow (a+b+c)^2 \le (a^2+b^2+c^2) \cdot 3 \Rightarrow$$

$$2ab+2bc+2ac \le 2a^2+2b^2+2c^2$$

$0 \le a+b+c \le 3$

Идея 2:

Точка равенства при $a=b=c=0$

Идея 3:

Из уч b можно выразить c, т.к.

$c^2 - c + (a^2 - a + b^2 - b) = 0$ — квадратный трёхчлен $\Rightarrow$ имеет 2 корня $\Rightarrow$ Если делать Штурма, то нужно т.к. a, b двигать, а c само подстроится

Идея 4:

Можно сделать замену переменных:

$$\left.\begin{aligned} x &= a-1 \\ y &= b-1 \\ z &= c-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = x+y+z+3 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 = -x-y-z}$$

А также

$$\frac{x^2}{y+z+3} + \frac{y^2}{x+z+3} + \frac{z^2}{x+y+3} \le \frac{3}{4+x+y+z}.$$

— ИМ

0 ИМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 05

Ответ: ~~333~~ ~~166~~ ~~1332~~ ~~250~~ 249 Ф.ик 2ЧН

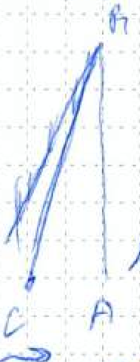
Пример: ~~создавляем~~ ~~чобы~~ ~~треугольник~~ ~~которые~~ ~~следующие~~ ~~3~~ ~~перпендикулярные~~ ~~сторонам~~

такого вида ~~333~~ 250

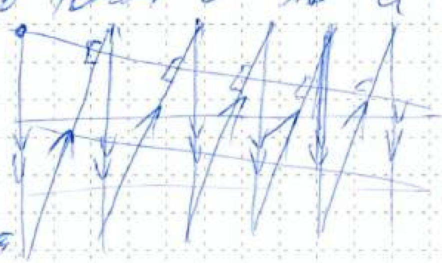
250

Теперь создаем ~~333~~ невдо треугольника, точки.

Рисуем отрезок и из конца отрезка другой отрезок таким образом:



, а потом из C откладываем $\overrightarrow{AB}$, в точку D, а потом из D откладываем $\overrightarrow{BC}$, в точку E, и т.д. ~~666~~ 498 раза. Всего ~~666~~ 500 прямых, но последнюю подорисовываем ещё одну ~~довод~~: И из этой точки рисуем ⊥ к вектору $\overrightarrow{BC}$, а потом из получившейся точки в $\overrightarrow{AB}$ и т.д. в итоге у каждой новой прямой ~~333~~ 250 и у вектора $\overrightarrow{BC}$ и у вектора $\overrightarrow{AB}$ по $\frac{500-1}{2}$ = ~~250~~ 249 пересечений



Она не замкнутся

Оценка: на ~~333~~ 250

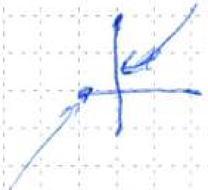
~~Точно лишь 3~~ Х 3 кар: 1) когда всего 2 не параллельные

когда? прямых?

2) когда всего 3 не параллельные 3) когда больше 3 не параллельных. | не могут быть все параллельны, т.к. 2 звена связанные друг с другом не параллельны

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 05

1 вар: Если эти 2 вектора не $\perp$ $\Rightarrow k=0$, иначе $\exists$ самый левый вектор, а из них самый ~~прав~~ верхний. Имеется в виду декартова система координат, где ось X $\parallel$ первому ~~вектору~~ вектору, а ось y — второму. И самый левый обозначает что у него ~~вектор~~ координата по X самая маленькая и еще ~~из~~ этот вектор должен быть $\parallel$ оси y, а т.к. ~~этот~~ этот вектор если пересекается что-то то только если $\parallel$ оси X, но т.к. это замкнутая ломаная то из конца этого вектора исходит вектор $\parallel$ оси y. Тогда самый левый вектор



из этой точки что-то выходит $\Rightarrow$?!

2 вар: если 3 вектора то к какому-то вектору нет его $\perp$, т.к. 3 нечет $\Rightarrow$?!!

3 вар: если 4 вектора, то $\exists$ тип векторов которых меньше всего. По Дирихле их $\leq 250 \Rightarrow$ все эти вектора пересекают другие векторы (свои парные) $\Rightarrow$ эти парные вектора имеют не больше 250 пересечений и ≤ 250

(*1) т.к. мы добавили 1 звено $\Rightarrow$ осталось 499 $\Rightarrow$ и 250 из них $\perp \overrightarrow{BC}$, а 249 $\perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ у вектора AB перпендикуляров 249, а у $\overrightarrow{BC}$ — 250 $\Rightarrow$ последний как раз замыкает ломаную $\Rightarrow k=249$

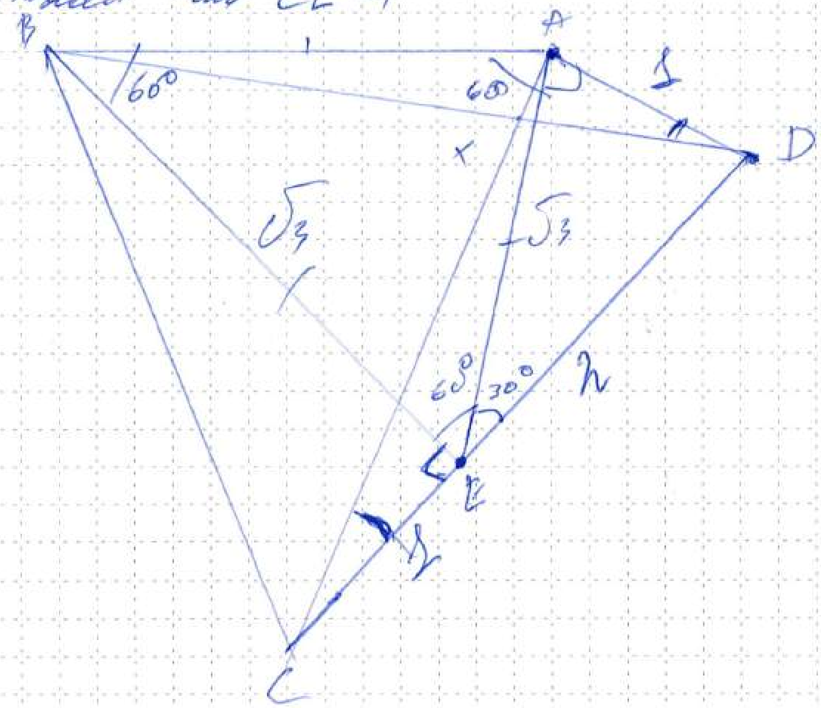
Задача № 15 Лист 1 из 1 Номер участника: 05

В ∀ квадрате 2×2 - стоит максимум один король.
Всего кв 2×2 в квадрате 30×30 - 225 ⇒ в 5 квадратах нет королей. В квадрате 9×9 - 16 квадратов 2×2, даже если в нём все эти 5 квадратов, то останется 16-5=11 квадратов с королями ⇒ в ∀ кв. 9×9 хотя-бы 11 королей

+ Сп ЭМ

Задача № 6 Лист 8 из 1 Номер участника: 105

Пусть E на CD, такая что $CE=1$



$\triangle CEA = \triangle DAB$

$\angle ACE = \angle BDA$

$CE = AD$

$BD = AC$

$\Rightarrow \angle AEC = 150^\circ \Rightarrow \angle AED = 30^\circ \Rightarrow AE = AB \Rightarrow$

$\dfrac{AP}{PE} = \dfrac{\sin(\angle DAE)}{\sin(\angle DEA)} \Rightarrow \angle DAE = 90^\circ \Rightarrow \angle EAB = 30^\circ \Rightarrow AE = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \triangle AE$ — р/с $\Rightarrow \angle AEB = \angle ABE = 60^\circ \Rightarrow$

$BE = \sqrt{3} \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow BC = 2$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 17 Лист 1 из 1 Номер участника: 05

+ТА

7ТА

~~если $ab+a+1$~~

Пусть $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=p^2(abc+1)$.

если $ab+a+1 \vdots p^2$, то $(bc+b+1)(ca+c+1) \le abc+1$, но это не правда $\Rightarrow$?! $\Rightarrow$

НУО $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow b(c+1) \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow b \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{c+1} \Rightarrow b+1 \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{c+1}+1 \Rightarrow$

$c(a+1)+1 \vdots p \Rightarrow c(a+1) \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow a+1 \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{c} \Rightarrow a \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{c}-1$

$a(b+1) \underset{p}{\equiv} \left(\frac{-1}{c}-1\right)\left(\frac{-1}{c+1}+1\right) \underset{p}{\equiv}$

$\underbrace{\frac{1}{c(c+1)}+\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c}}_{0}-1 \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow a(b+1) \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow ab+a+1 \vdots p \Rightarrow$

$abc+1 \vdots p \Rightarrow \left.\begin{matrix} abc+1 \vdots p \\ ab+a+1 \vdots p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} abc+1 \vdots p \\ abc+ac+c \vdots p \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac+c-1 \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} ca+c-1 \vdots p \\ ca+c+1 \vdots p \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p=2 \Rightarrow$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots 4 \cdot (abc+1)$, но т.к. $abc+1 \vdots 2 \Rightarrow$

$a, b, c \not\vdots 2 \Rightarrow ab+a+1 \not\vdots 2$, $bc+b+1 \not\vdots 2$, $ca+c+1 \not\vdots 2 \Rightarrow$

?! $\Rightarrow$ Нет не могло такое случится

Задача № 8 Лист 1 из 2 Номер участника: 05

нт и 7 КАБ

К каждой сумме из 24 гирь, кот больше чем любая другая группа из 24 других гирь можно сопоставить другую группу из 25 гирь ⇒ если вся сумма S, то выбирается какая-то гиря которую выбросим. Пусть есть у группы 24 сумма t, то в убираемая гиря весит $S-2t$, но т.к гирь 50, то всего сумм макс 51 (если все гири не используются, то в ост. ничего). Тогда достаточно предъявить 52 различные расстановки, где в каждой сумма будет различаться и больше чем $\forall$ группа из 24 других гирь.

Пусть веса гирь $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$, где $a_i < a_j$ если $i < j$.

Тогда группы вида $a_{28}, a_{29}, \dots, a_{50}$ и V_i, кот больше 3 или равно 3 и меньше 28 подходят т.к в $\forall$ общ. расстановке есть хотя бы одна гиря с индексом меньше или равным 3 ⇒ можно разбить на пары: a_i (кот в 1 группе) с гирей у кот индекс ≤ 3 из 1 группы по любому V_i ⇒ в 1 группе все гири больше. Всего 27−3 = 24 группы.

Тогда и группы $a_{27}, a_{29}, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{50}$ и V_i, $6 \le i < 27$. Группы такие подходят. (*2) Всего 28−6 = 22 групп

Тогда и группы $a_{27}, a_{28}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots, a_{50}$ и V_i; $8 \le i < 31$. Эти группы такого вида подходят по аналогичной причине. 29−8 = 21 и уже 27+21+24 ⇒ 52 ≥ нем, такого примера (*1)

Все эти суммы различны, т.к чем меньше группа в моём решении, тем она меньше, т.к мы заменяем ~~[illegible]~~ большие числа в числе на меньшие. [illegible]

Задача № 8 Лист 2 из 2 Номер участника: 05

(*1) во всех примерах были $a_{30}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{50}$ так что это можно отбросить. Почему 1 группа (сумма) > 2 группы (по сумме) т.к. в 1 группе $a_i + a_{28} + a_{29}$, а во второй

$$a_i + a_{28} + a_{29}$$
$$\vee \quad \vee \quad \parallel$$
$$a_4 + a_j + a_{29}$$

Почему в 3 группе (по сумме) < 2 группе (по сумме) т.к. во 2 группе $a_3 + a_j + a_{29}$, а в 3 группе =

$$a_3 + a_j + a_{29}$$
$$\parallel \quad \vee \quad \vee$$
$$= a_4 + a_5 + a_k <$$

(*2) Среди чисел с инд ≤ 5 из ост есть хотя-бы 3 (не выш a_3. $\Rightarrow$ a_4 можно опред. в пару, a_4 a_6 тоже, а ост вообще самые большие, так что точно можно объединить в пару