Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 07

1. Ответ: 4.

Оценка:

Всего натуральных чисел от 2 до 6 – 5. Т.о. 4 – это все без одного. Предположим противное; Вася получил 5 пятёрок => n и 2-хор., и 3-хор., и ... 6-хор.

Пусть $n = k + (k+1)$ – (2-хорошее) и

$n = l + (l+1) + (l+2) + (l+3)$ – 4-хорошее.

Тогда $2k+1 = 4l+6$. Но $2k+1 \not\vdots\, 2$, $4l+6 \,\vdots\, 2$. =>

$2k+1 \neq 4l+6$ (!?).

=> Число не м.б. одновременно 2- и 4- хор. => все 5 пятёрок не достигаются.

Пример:

Вася придумает число 105:

$105 = 52 + 53$ — 2-хор.

$105 = 34 + 35 + 36$ — 3-хор.

$105 = 19 + 20 + 21 + 22 + 23$ — 5-хор.

$105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$ — 6-хор. => 4 пятёрки получит Вася.

~~105~~

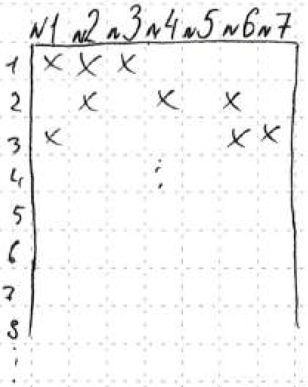
+ KA 7 ДМ

Задача № 2 Лист ~~2~~ 1 из 2 Номер участника: 07

7каб 7гзд

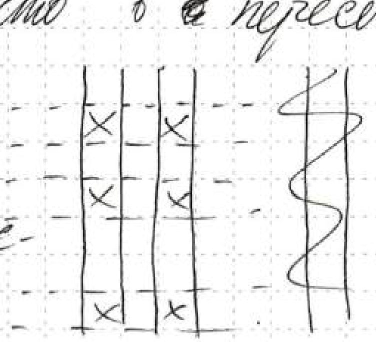
2. Ответ: 21.

Оценка: нарисуем таблицу ~~участия~~ участия детей в кружках



Столбцы - кружки, строки - люди; будем ставить крестик в пересечении строки и столбца x и y, если ~~человек~~ номер x ходит в кружок y. (пронумеруем ~~их~~ людей и кружки)

Тогда в каждой строке одинаковое число крестиков, а для любых двух столбцов найдутся ровно 3 строки такие, что в ~~е~~ пересечении с ними стоят крестики:



Кол-во строк = кол-ву людей.

Посчитаем кол-во пар крестиков, стоящих в одной строке.

Мы знаем, что для любой пары столбцов кол-во пар крестиков, стоящих в них и ~~в~~ в одной строке = 3. Т.е., чтобы посчитать все пары, достаточно умножить 3 на кол-во пар столбцов, т.к. такие пары крестиков не пересекаются => не будут посчитаны 2 раза. => кол-во пар крестиков в одной строке = n =

$$= 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = \underline{63}$$

С другой стороны, если ребёнок ходит в y кружков, в одной строке $\frac{y \cdot (y-1)}{2}$ указанных пар => всего их $\frac{y(y-1)}{2} \cdot x$, где x - кол-во детей => $6 < x < 60$.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Таким образом:

$$63 = x \cdot \frac{y(y-1)}{2}.$$

Рассмотрим, чему м.б. равно $\frac{y(y-1)}{2}$. $0 \le y \le 7$ =>

y	$\frac{y(y-1)}{2}$				
0	0	=>	$63 = 0$	(!?)	=> $x = 21$.
1	0		$63 = 0$	(!?)	
2	1		$63 = x$	$x = 63 > 60$ (!?)	
3	3		$63 = 3x$	$x = 21$	
4	6		$63 = 6x$	$x = 10{,}5 \notin \mathbb{N}$ (!?)	
5	10		$63 = 10x$	$x = 6{,}3 \notin \mathbb{N}$ (!?)	
6	15		$63 = 15x$	$x = 4{,}2 \notin \mathbb{N}$ (!?)	
7	21		$63 = 21x$	$x = 3 < 6$ (!?)	

Значит, единственное возм. кол-во детей – 21, причём каждый ходит в 3 кружка.

Пример:

Ниже приведён пример в виде таблицы, использовавшейся в оценке. В ней 7 строк, но и у любых 2 столбцов только одна пара крестиков в одной строке. Для получения полного примера данную таблицу нужно 2 раза параллельно перенести вниз* (продублировать). Очевидно, получится нужный пример:

$1 \cdot 3 = 3$, $3 \cdot 7 = 21$.

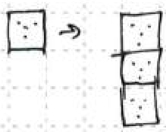
* 

Таблица:

	1	2	3	4	5	6	7
1	x	x	x				
2	x			x	x		
3	x					x	x
4		x		x		x	
5		x			x		x
6			x	x			x
7			x		x	x	

Для любых 2 столбцов ровно 1 строка, в которой в этих 2 столбцах стоят оба крестика.

Пример укорочен для уменьшения громоздкости и облегчения проверки.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 07

3. (!) $\underbrace{\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1}}_{л.ч.} \le \underbrace{\frac{3}{a+b+c+1}}_{п.ч.}$. $a+b+c = a^2+b^2+c^2$

Лемма.

Дано число $\frac{x}{y}$ $x, y \ge 0$ $(y>0)$. $\frac{x}{y} \le 1$. Дано $a \ge 0$.
$(x, y, a \in \mathbb{R})$

Тогда $\frac{x+a}{y+a} \ge \frac{x}{y}$.

+ Тим 7 Δп

Док-во:

$\frac{x}{y} \le 1 \Rightarrow x \le y$. (!) $\frac{x+a}{y+a} \ge \frac{x}{y}$. $xy + ay \ge xy + ax$.
$ay \ge ax$. $a = 0$ ✓
$a \ne 0$ $y \ge x$ ✓.

$\Rightarrow$ ч.т.д.

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2 + a}{a+b+c+1}$ по лемме $= \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}$ (доб. a)

$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{(b-1)^2 + b}{a+b+c+1} = \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}$ (доб. b)

$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(c-1)^2 + c}{a+b+c+1} = \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}$ (доб. c)

Суммируя, получаем

$л.ч. \le \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1} + \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1} + \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1} = \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{c+a+b+1} = \frac{3}{a+b+c+1} = п.ч.$

* Докажем, что лемма была применена корректно.
(На примере 1 дроби, ост. аналогично)

$(a-1)^2, b+c+1, a \ge 0$ ✓

(!) $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le 1$ $(a-1)^2 \le b+c+1$ $a^2 - a \le a+b+c$

$a^2 - a \le a^2+b^2+c^2$ $\underset{0}{-a} \le \underset{0}{b^2+c^2}$ $\Rightarrow$ ч.т.д.

$\Rightarrow$ л.ч. $\le$ п.ч. чтд.

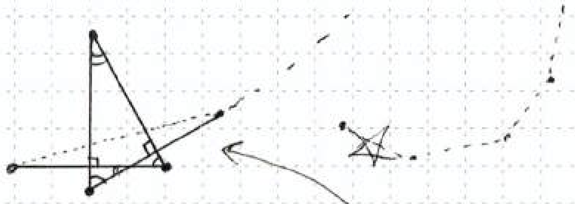
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 3 Номер участника: 07

МК 0 АП

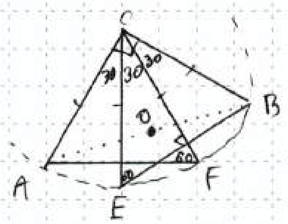
4. Ответ: 1

Пример:



На каждом из рёбер правильного ~~200~~ 250-уг. построим данную конструкцию (пунктиры - рёбра 200, 250-угольника) все чёрные отр-ки равны. Все углы ($= 60^\circ$, углы (($= 30^\circ$. Видно, что рёбра бьются на пары перпендикулярных.

Заметим, что эти конструкции не пересекаются:

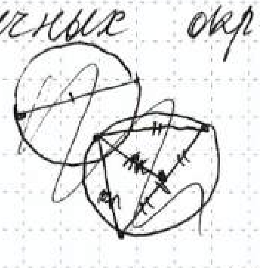


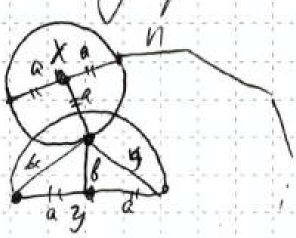
Посчитаем углы на картинке

O – сер. AB => $C \in$ окр-ности, постр. на AB как на диаметре.

Т.е. точки C – просто середины дуг окр-ностей, постр. на сторонах 250-уг. как на диаметре.

=> они не совп. и не лежат на других отр-ках, т.к. пусть нет, и (·) C лежит внутри какой-то из аналогичных окр-ностей.





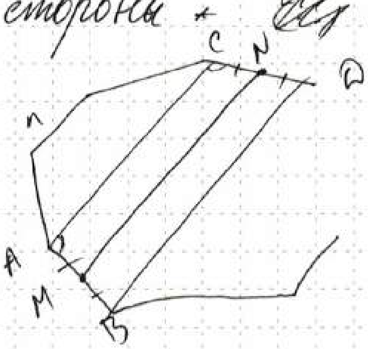
$x < a$, $y < a$ (иначе)

$b < a$ (т.к. (·) внутри окр-ности)

=> $XY < a + b$ по нер-ву Δ => $XY < 2a = n$ – сторона многоуг.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

=> какой-то из отр-ков, соединяющих середины сторон многоуг., меньше стороны + ~~...~~!

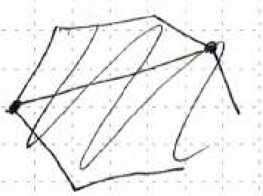


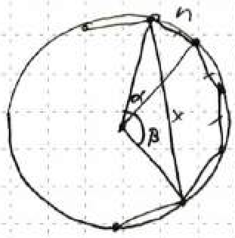
ABCD - трапеция из симметрии => MN ср. л. =>

$MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$ =>

$MN > \min(AB, CD)$,

но $AB, CD > n$ (сторона), т.к.



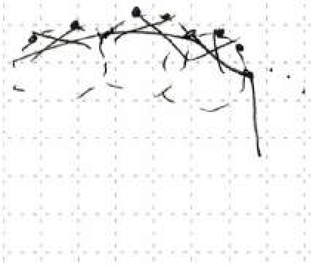


рассм. окр-ность, в кот. вписан правильный многоуг.

$\alpha < \beta$ => хорда $n < x$ => ч.т.д.

А точки, лежащие снаружи, не совп., т.к. а сегменты, ~~на~~ (в частности, дуги, на которых они лежат) окр-ностей ABFE не пересекаются. (дуга $\overset{\frown}{ABE}$ меньшая: $\angle ACB = 90° - 180°$, а он центральный).

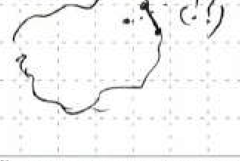
=> выпуклые оболочки ABFE не пересек. => E, F не совпадут ни с кем и не будут лежать на других звеньях



=> данный пример подходит.

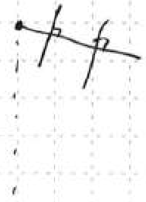
Оценка:

Заметим, что выпуклая оболочка вершин ломаной не содержит ни одного звена: (иначе нет пер. звеньев, его пересекающих)

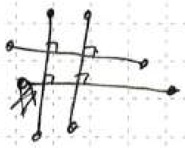


Задача № ~~3~~4 Лист 3 из 3 Номер участника: 07

Можно рассматривать самую верхнюю левую верш.



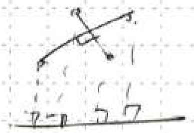
Заметим, что вся ломаная разбивается на такие решётки:



Необязательно правильные, но прямых каждого напр-я ≥ 2.

Каждая вершина лежит ровно в 2 таких решётках.

Можно пробовать спроецировать все эти отр-ки на прямую



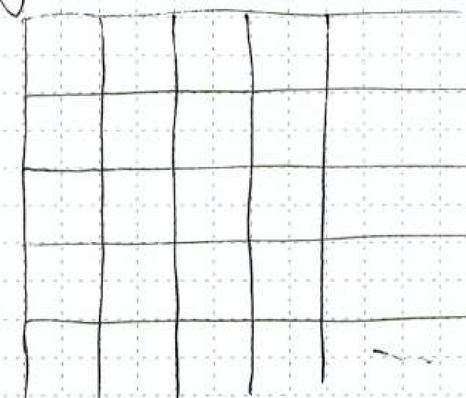
Оценка на 999 очевидна.

Дальше не знаю.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 07

5. Разобьём кв-т 30×30 на кв-ты 2×2.

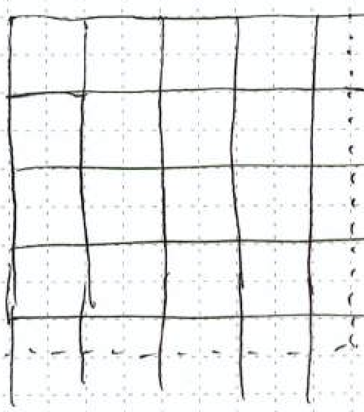


Их получится $\frac{30\cdot30}{4} = 225$ шт.
В одном кв-те не может стоять 2 короля, т.к. они будут соседями либо по стороне, либо по диагонали.

Всего королей 220, а кв-тов 225 $\Rightarrow 225 - 220 = 5$ будут свободны.

~~Рассмотрим~~ Нарисуем разбиение на кв-ты 2×2 красным, ~~на~~. ~~[illegible]~~ Тогда красные и обычные линии чередуются.

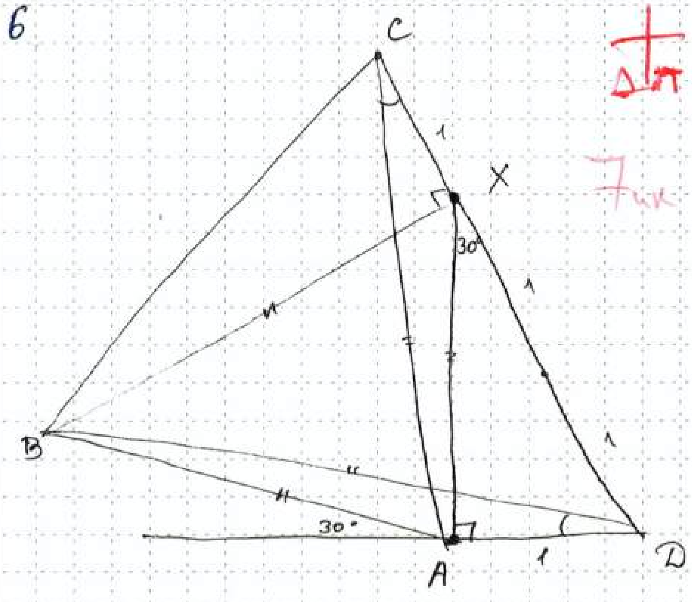
Рассмотрим любой кв-т 9×9. Поскольку его гориз. сторона нечётна, одна из них будет лежать на чёрной линии, а одна на красной. Аналогично с вертикалями $\Rightarrow$ у кв-та 9×9 будет угол, обр-нный красными линиями. НУО это левый верхний, иначе повернём.



Тогда видно, что из этого кв-та можно вырезать 16 кв-тов 2×2 целиком. Из них не более 5 свободно $\Rightarrow \geq 16-5 = 11$ занято $\Rightarrow \geq 11$ королей в этом кв-те 9×9 есть. ч.т.д.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

6



Отметим на CD т. X такую, что $CX = 1 = AD$

Тогда $\triangle ACX \overset{I}{=} \triangle BAD \Rightarrow$

$AX = AB$

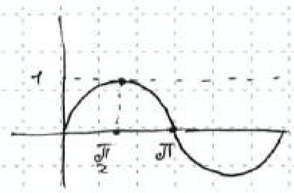
$XD = CD - CX = 3 - 1 = 2$, $AD = 1$,

$\angle CXA = \angle BAD = 150^\circ \Rightarrow \angle AXD = 30^\circ$.

Тогда $\angle XAD = 90^\circ$.

Проще всего д-ть это так:

$] \angle XAD = \alpha$; $\dfrac{XD}{AD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ} = 2 \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \sin\alpha = 1. \Rightarrow$



$\angle XAD = 90^\circ$ ($\angle XAD \in (0; 180^\circ)$).

$\Rightarrow \angle XAB = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, $AB = AX \Rightarrow$

$\triangle ABX$ р/б с углом $60^\circ \Rightarrow \triangle ABX$ р/ст.

$\Rightarrow AB = BX = AX. \Rightarrow \angle BXA = 60^\circ$, $\angle AXD = 30^\circ \Rightarrow$

$\angle BXC = 90^\circ \Rightarrow \triangle AXD \overset{I}{=} \triangle BXC \Rightarrow XD = BC = 2 \Rightarrow$

Ответ: 2.

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 07

7. Ответ: нет.

Пусть может. Тогда. $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=p^2(abc+1)$.

p - простое

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) \vdots p^2$. 1° Пусть какие-то 2 скобки $\vdots p$. (выражение циклически симметрично, так что НУО это $bc+b+1$ и $ac+c+1$.

$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow abc+ab+a \vdots p$
$ac+c+1 \vdots p \Rightarrow abc+bc+b \vdots p$
$\Rightarrow ab+a-bc-b \vdots p$
добавим $bc+b+1 \Rightarrow$
$ab+a+1 \vdots p$.

$\Rightarrow$ Если какие-то 2 скобки $\vdots p$, то и третья тоже.

$\Rightarrow ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p$, $ac+c+1 \vdots p$, $\Rightarrow abc+1 \vdots p$. * т.к. влево p входит в ≥ 3 степ. а вправо только во 2, если $abc+1 \not\vdots p$.

~~НУРТЫ~~

~~$abc-ab-a \vdots p \Rightarrow bc-b-1 \vdots p$, т.к. $a \not\vdots p$, иначе $abc \vdots p \Rightarrow abc+1 \not\vdots p$~~

$abc+1 \vdots p \Rightarrow a, b, c \not\vdots p$.

$ab+a+1 \vdots p \Rightarrow abc+ac+c \vdots p \Rightarrow ac+c-1 \vdots p$. $ac+c-1 \vdots p$, $ac+c+1 \vdots p$

$2 \vdots p \Rightarrow$ $p=2$. $\Rightarrow$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=4(abc+1)$.

Заметим, что $(bc+b+1)(ac+c+1)=(\underline{abc}^2+bc^2+bc+\underline{abc}+bc+b+ac+c+1)=$

$=((abc+1)(\underset{\geq 2}{c+1})+bc^2+2bc+b+ac+1) > 2(abc+1)$,

$(\underset{\geq 1}{ab}+\underset{\geq 1}{a}+1) > 2 \Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) > 4(abc+1) \Rightarrow (!?)$

Этот сл-й невозможен.

2° Только одна скобка $\vdots p$ $\Rightarrow$ она делится и на p^2.

НУО это $ab+a+1$. ~~$ab+a+1 \vdots p^2 \Rightarrow (abc+1) \vdots (bc+b+1)(ac+c+1)$~~

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=p^2(abc+1)$.

$ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1$, $ac+c+1 \not\vdots p \Rightarrow ab+a+1 \vdots p^2 \Rightarrow$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

$ab+a+1 \geq p^2 \Rightarrow$ ~~$b\ (abc+1)\ \vdots\ b$~~

$abc+1 \ \vdots\ (bc+b+1)(ac+c+1)$. Однако

Тогда $abc+1 \geq (bc+b+1)(ac+c+1) = abc^2+bc^2+bc+abc+bc+b+ac+c+1 = (abc+1)\underbrace{(c+1)}_{\geq 2}+\underbrace{\ldots}_{\geq 0} > abc+1 \Rightarrow (!?)$.

Таким образом, чтд: такого быть не могло.

8. Лемма: сумма весов любых ~~двух~~ трёх гирек больше веса любой другой.

Док-во: Рассмотрим 24 самых тяжёлых гири. Пусть сумма их весов $= y$. Рассмотрим набор гирь, их уравновешивающий. Он состоит из более чем 24 гирь, т.к. все гири, в него входящие, легче гирь первого набора.

$x_1 \ldots x_{50}$ – гири. $x_1 < x_2 < \ldots < x_{50}$.

$x_{27} + \ldots + x_{50} = y$.

$$\underbrace{a\ b\ c \ldots}_{\substack{y+\varepsilon \\ \varepsilon \geq 0 \\ \text{набор } B \\ 26\text{ шт.}}} \ \underbrace{\ldots\ m}_{\substack{y \\ \text{набор } A \\ 24\text{ шт.}}}$$

Очевидно тогда, что суммы любых других наборов из 24 гирь меньше y, т.к. гири легче.

Представим, что мы выкинули из набора B 3 самых лёгких гири a, b, c и добавили самую тяжёлую m. В нём теперь 24 гири (не самые тяжёлые), и сумма весов $y + \varepsilon - a - b - c + m < y$.

$$m + \varepsilon - a - b - c < 0 \qquad a + b + c > m.$$

Заметим, что

$$x_i + x_j + x_k \geq a + b + c > m \geq x_l \Rightarrow \text{лемма доказана.}$$

Это можно интерпретировать геометрически, сделав не гири, а отрезки. Лемма в новом понимании утверждает, что из любых 4 отр-ков ~~можно~~ можно сложить 4-уг.

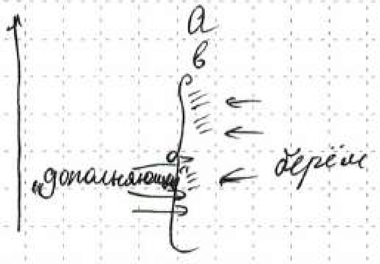
Ответ: нет. ~~можно~~

На самом деле лемма верна и про сумму любых двух гирек в том сл-е, если набор, уравновешивающий A, не строго равен B.

Задача № 8 Лист 2 из 2 Номер участника: 07.

Это очевидно, т.к. в таком сл-е в > а

Как можно пробовать д-ть ответ нет:



По возр-ю: а и в ~~либо самые маленькие,~~ большие

Можно рассматривать как вообще возможно уравновешивать наборы из нижних 48 шт;

Возьмём какие-то 24 и посмотрим как из них получить дополняющие* 24, и наоборот. Скорее всего, где-нибудь сломается то, что „не хватит разнообразия".

* имеется в виду до больших 48.

Можно ещё брать не самые большие, а самые маленькие гирьки вместо а, в. М.б. сработает.

Если строить пример, то наверное следует попробовать условные степени двойки, которые нетрудно складывать.