РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия АТЛАСОВА

Имя: АДЕЛИНА

Отчество: АЙНУРОВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Татарстан

4. Контактный телефон ~~897~~ 8904 662 48 44

5. Контактный электронный адрес atlasovaelv@mail.ru

12:05-12:07

Задача № 1 Лист ~~1~~ 1 из 1 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Разбор~~

Посмотрим на сумму любых k подряд идущих чисел где $1<k<7$. Тогда ~~пусть~~ ~~[illegible]~~ сделаем табличку по сумме для каждого k

k	ряд чисел	сумма	что-то про эту сумму
2	$a, a+1$	$2a+1$	— нечет. т.к. $\frac{2a+1}{2} \equiv 1$
3	$a, a+1, a+2$	$3a+3$	— $\vdots 3$ т.к. $3a \vdots 3$, $3 \vdots 3$
4	$a, a+1, a+2, a+3$	$4a+6$	— чет, т.к. $4a \vdots 2$, $6 \vdots 2$
5	$a, a+1, a+2, a+3, a+4$	$5a+10$	— $\vdots 5$, т.к. $5a \vdots 5$, $10 \vdots 5$
6	$a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$	$6a+15$	— нечет т.к. $6a \vdots 2$, $15 \not\vdots 2$

Ответ: 4

Пример: $n = 105$

105 — ($2,3,5,6$-хорошее) т.к.

$105 = 6 \cdot 15 + 15$ (сумма чисел от 15 до 20) $= 2 \cdot 52 + 1$ (сумма чисел от 52 до 53) $= 3 \cdot 34 + 3$ (сумма чисел от 34 до 36) $= 5 \cdot 19 + 10$ (сумма чисел от 19 до 23)

Оценка: рассмотрим 2 варианта n-чет и n-нечет

(1) $n \vdots 2$, тогда n не может быть 2-хорошим и 6-хорошим т.к. сумма 2 и 6 подряд идущих чисел нечетна $\Rightarrow$ т.к максимум он может получить 5 пятерок ($k = 2, 3, 4, 5, 6$), то тут только 3 ($k = 3, 4, 5$) $3 < 4 \Rightarrow$ при четном n -кол-во пятерок ~~[illegible]~~ не превышает в нашем ответе

(2) $n \not\vdots 2$ тогда n не может быть 4-хорошим т.к. сумма 4 подряд идущих чисел $\vdots 2$ $\Rightarrow$ k может быть $\le$ только $2, 3, 5, 6$ — 4 пятерки это не превосходит ответа ($4 \le 4$)

Пример есть

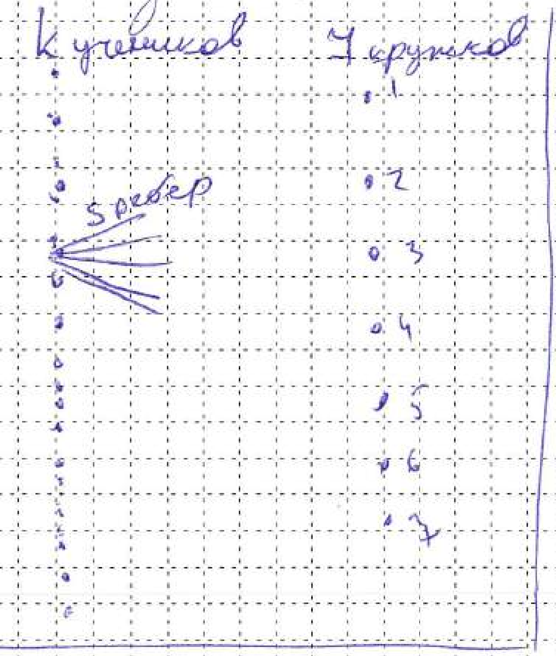
Везде речь про натуральные, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ [illegible]

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Атласова Аделина

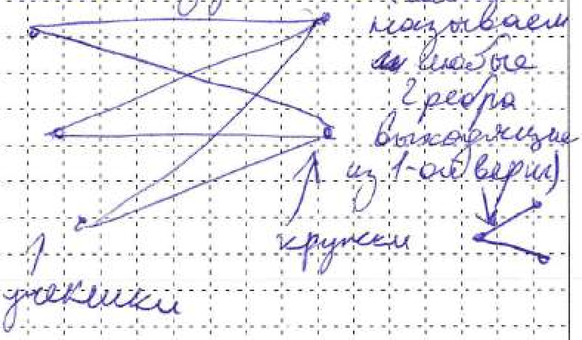
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$\boxed{\text{Ответ: } 21}$

Будем решать задачу через двудольный граф, вершины одной доли - ученики, другой - кружки, ребрами соединим кружок и ученика если этот ученик ходил на этот кружок. Пусть учеников k, каждый ходит на S кружков $6 < k < 60$, очевидно $k, S \in \mathbb{N}$



В условии сказано, что для любых двух кружков найдутся ровно 3 ученика, которые посещают оба. Это значит что на любых двух вершинах (кружках) 3 галки из учеников (галкой называем любые 2 ребра выходящие из 1-ой верш.)



- Посчитай кол-во галок 2-мя способами (со сторона учеников и кружков). Со стороны кружков галок: $3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 63$ т.к. $\frac{7 \cdot 6}{2}$ - кол-во способов выбрать 2 кружка, и на каждую пару кружков 3 галки $\Rightarrow \times 3$.
- Теперь посчитаем кол-во галок со стороны учеников: $k \cdot \frac{S(S-1)}{2}$ — у одной вершины кол-во галок $\frac{S(S-1)}{2}$ - любые два ребра у нее образуют галку, кол-во способов выбрать 2 ребра, а всего вершин $k \Rightarrow$ $\Rightarrow \times k$.

Т.к. мы посчитали 2-мя способами одну и ту же величину приравняем

$$63 = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = k \cdot \frac{S(S-1)}{2}$$

$\to 63 = 7 \cdot 3^2$, т.к. ~~...~~ k и $\frac{S(S-1)}{2}$ (кол-во способов - нат.) то и $63 = k \cdot \frac{S(S-1)}{2}$ то

вот все варианты разложения, сразу вычеркнем где $k = 1, 3, 63$ т.к. $6 < k < 60$

k	$\frac{S(S-1)}{2}$
~~1~~	~~63~~
~~63~~	~~1~~
21	3
~~3~~	~~21~~
7	9
9	7

$\frac{S(S-1)}{2}$ может быть $= 3, 7, 9 \Rightarrow$

$\times 2$

$S(S-1)$ может быть $= 6, 14, 18$

Но произведение двух последовательных натур. чисел не может быть $= 14, 18$

$1 \cdot 2 = 2$ $\quad 4 \cdot 5 = 20$
$2 \cdot 3 = 6$ $\quad 5 \cdot 6 = 30$
$3 \cdot 4 = 12$ $\quad \vdots$

$\Rightarrow S(S-1) = 6$

$\boxed{S = 3 \quad k = 21}$

Пример не нужен, существование гарантировано

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Везде на это опираемся

a, b, c — неотриц. $a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \cancel{= \frac{a^2-a}{b+c+1} \overset{*}{=} \frac{b+c-b^2-c^2}{b+c+1}} =$$

$$= \frac{a^2-2a+1}{b+c+1} = \frac{a^2-a+1}{b+c+1} - \frac{a}{b+c+1} \overset{*}{=} \frac{b+c-b^2-c^2+1}{b+c+1} - \frac{a}{b+c+1} =$$

$$\overset{**}{\le} \frac{a+b+c-b^2-c^2+1}{\underset{a+b+c+1\neq 0}{a+b+c+1}} - \frac{a}{b+c+1} \overset{***}{=} \frac{a^2+b^2+c^2-b^2-c^2+1}{a+b+c+1} - \frac{a}{b+c+1} = \frac{a^2+1}{a+b+c+1} - \frac{a}{b+c+1}$$

*: a^2-a заменила на $b+c-b^2-c^2$ т.к. $a^2-a=b+c-b^2-c^2$

**: $\frac{b+c+1-b^2-c^2}{b+c+1}$ — у этой дроби числитель < знам.

т.к. b^2+c^2 — полож., b, c — неотр. Посмотрим на дробь $m<n$ $m\le n$

$\frac{m}{n}$, $m \ge 0$, $n>0$. $\frac{m}{n} \le \frac{m+a}{n+a}$, $a\ge 0$ т.к.

m≥0 неясно откуда но это неважно

$am \le an$

$mn+am \le mn+an$

$$\frac{m}{n} \le \frac{m+a}{n+a} \Rightarrow \frac{b+c+1-b^2-c^2}{b+c+1} \le \frac{a+b+c-b^2-c^2+1}{a+b+c+1}$$

***: $a+b+c$ заменила на $a^2+b^2+c^2$ т.к. $a+b+c=a^2+b^2+c^2$

С другими 2-мя дробями аналог.:

$$\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \le \frac{b^2+1}{a+b+c+1} - \frac{b}{c+a+1} \quad \Bigg| \quad \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{c^2+1}{a+b+c+1} - \frac{c}{a+b+1}$$

Сложим все вместе:

$$\boxed{\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1}} \le \frac{a^2+1}{a+b+c+1} - \frac{a}{b+c+1} + \frac{b^2+1}{a+b+c+1} - \frac{b}{c+a+1} + \frac{c^2+1}{a+b+c+1} - \frac{c}{a+b+1} \overset{\text{общ. знам.}}{=}$$

$$= \frac{3+a^2+b^2+c^2}{a+b+c+1} - \frac{a}{b+c+1} - \frac{b}{c+a+1} - \frac{c}{a+b+1} = \frac{3}{a+b+c+1} + \underbrace{\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c+1}}_{\text{Замена на } a+b+c} - \frac{a}{b+c+1} - \frac{b}{c+a+1} - \frac{c}{a+b+1} =$$

$$= \frac{3}{1+a+b+c} + \frac{a+b+c}{1+a+b+c} - \frac{a}{b+c+1} - \frac{b}{c+a+1} - \frac{c}{a+b+1} = \frac{3}{1+a+b+c} + \underbrace{\frac{a}{1+a+b+c} - \frac{a}{b+c+1}}_{\le 0 \text{ т.к. числ.} =,\ 1+a+b+c > b+c+1 \text{ то есть 1ое число} \le \text{2-ого}}$$

$$+ \underbrace{\frac{b}{1+a+b+c} - \frac{b}{c+a+1}}_{\le 0 \text{ т.к.}} + \underbrace{\frac{c}{a+b+1+c} - \frac{c}{a+b+1}}_{\le 0 \text{ т.к.}} \le \boxed{\frac{3}{1+a+b+c}} \text{ — доказали}$$

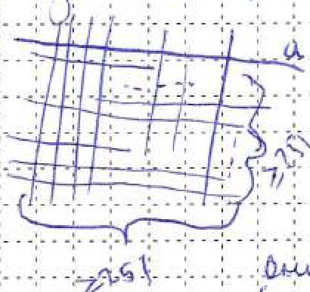
$$\frac{b}{1+a+b+c} < \frac{b}{c+a+1} \qquad \frac{c}{a+b+c+1} < \frac{c}{a+b+1}$$

Задача № 4 Лист 1 из ~~4~~ 2 Фамилия, имя: Алосова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: 250

Оценка: Пусть ~~что~~ все звенья ~~которое~~ пересекают ≥ 251 звена под 90°, тогда посмотрим на любое такое звено a. Тогда каждое из этих звеньев должно пересекать еще ≥ 51 звено под 90° $\Rightarrow$ они $\parallel a$. Тогда звена уже в сумме ≥ 502 ~~ребра~~, но при этом каждое из звеньев ~~ребер~~ $\parallel a$ и само a надо соединить между собой, они несоединимы т.к. $\parallel$, это еще ≥ 250 р. (т.к. всего ≥ 251) ~~стрелочек~~ $\perp a$ то же самое, то есть + еще ≥ 250 ~~ребер~~ звеньев. Итого ≥ 1002 звена.

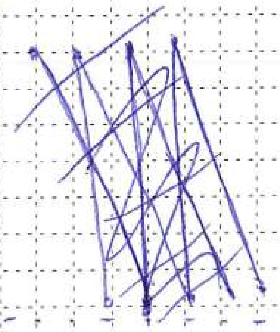


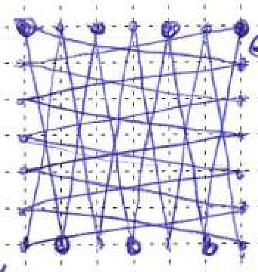
$\Rightarrow k \leq 250$

Почему они не могут соединяться перпендикулярными?

Пример:

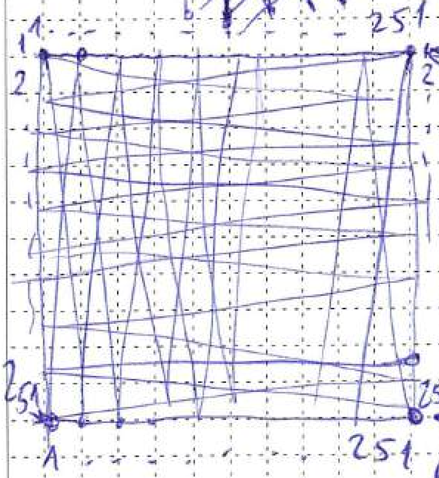
Посмотрим как строить пример для маленьких k для понимания.





← Пример для 24 звеньев.

- Теперь как строить для 1000. Рисуем квадрат 250×250 и начиная с левой верхней вершины ~~стрелочки~~ соединяем с 2-ой левой нижней, потом 3-ья левая верхняя, и в конце придем в правую верхнюю т.к. вершин 251



- см. рис. И если закодировать нашу ломаную где В - верхняя ~~грань~~ сторона, Н - нижняя, Л - левая, П - правая, и пронумеровать как на рисунке (1В = 1Л, 251Л = 1Н, 251Н = 251П, 251В = 1П) то код будет:

Н - нечетные номера, В - чет.

(1) 1В, 2Н, 3В, 4Н, 5В, ..., 250Н, 251В,

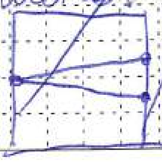
(2) Л - чет номера, П - неч → 2Л, 3П, 4Л, 5П, 6Л, ..., 250Л, 251П,

(3) В - чет, Н - неч → 250В, 249Н, 248В, 247Н ... 2В, 1Н,

(4) П - чет, Л - неч → 250П, 249Л, 248П, ..., 2П, 1Л

пришли в начало (1Н = 1Л)

~~Всего 4 ряда кода, очевидно что в каждом ряду звенья равны! (Например ребро $kЛ \to (k+1)П = (k+1)П \to (k+2)Л$) это верно потому что $(k+1)П$ на серёдке других 2-ух точек) с Н и В аналог. Также заметим что ребра при переходе на новый ряд кода звенья =~~



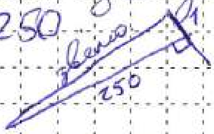
~~= 251П 250В т.е. 251 и ребро 250В 250П~~

Продолжение

~~1518 = 1518 < 1 т.к. 1518 в квадрате 250 и в 1~~

все звенья = м/о собой

Т.К. каждое звено - гипотенуза △ п/у △ с катетами 1 и 250



. Теперь докажем почему каждое звено пересекает ≥250 звеньев под < 90°, представим что наш квадрат — координатная плоскость а все звенья, части прямых которые в них содержатся. Тогда посчитаем k-коэф. этих прямых.

$$\left[\begin{array}{l} k = 250 \\ k = \frac{1}{250} \\ k = -\frac{1}{250} \\ k = -250 \end{array}\right.$$

Прямые перпендикулярны когда произведение их коэфф. = −1.

~~[illegible]~~ $250 \cdot \frac{-1}{250} = -1$ картинка симметрична

$-250 \cdot \frac{1}{250} = -1$

Для каждого ребра есть 250 не пересекающихся с ~~ребр~~ звеньев для которых коэф дают −1 =>

=> ≥250 ⊥ звеньев под ∠90°

Все условия задачи выполнены и доказаны => Ответ: 250

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия АТЛАСОВА

Имя: АДЕЛИНА

Отчество: АЙНУРОВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Татарстан

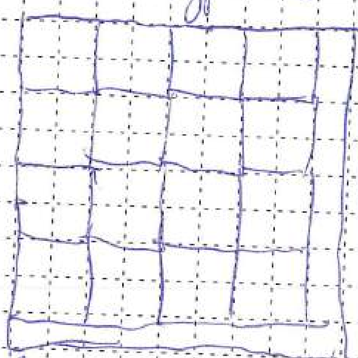
11:37 – 11:40
12:43 – 12:46

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разобьем доску 30×30 на квадратики 2×2, таких квадратиков будут ~~[illegible]~~ $\left(\frac{30}{2}\right)^2=225$. Заметим что в один квадрат 2×2 нельзя поставить 2-ух королей, так чтобы они не били друг друга (Пусть один король стоит в углу тогда где бы не стоял 2-ой тот его бьет)

Тогда если на нашей доске 220 невлюбленных королей, и в каждом квадрате 2×2 1 или 0 королей тогда пустых квадратов ≤5. (Если >5 то останется ≤219 квад ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в каком-то будут 2 короля). Теперь посмотрим на наш квадрат 9×9 ~~наш угл~~ ~~Разобьем его тоже на квадраты 2×2 см рис. У нас 16 кв 2×2~~ ~~потому что можно разбиение задать~~ И т.к. на всей доске ≤5 пустых (без короля) кв 2×2. То среди этих 16 тоже ≤5 пустых $\Rightarrow$ ≥11 заполненных квадратов $\Rightarrow$ т.к. в заполненном 1 король то мы доказали что в любом квадрате 9×9 стоит не менее 11 королей.



Квадраты 2×2 могут не совпасть с квадратами исходного разбиения.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

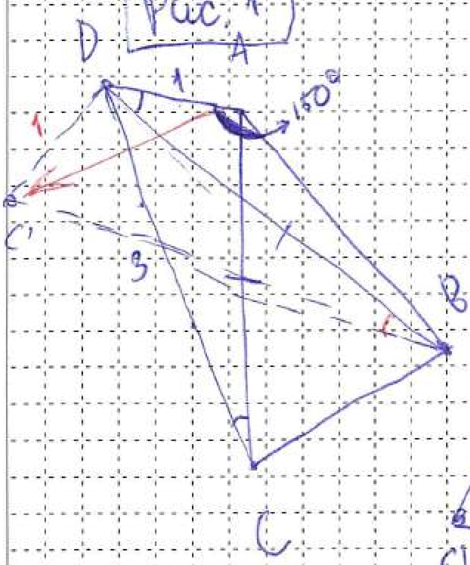


Рис. 1

– параллелогр.

Дано: $\triangle ABCD$ – 4уг., $AC = DB$, $\angle ADB = \angle ACD$, $AD = 1$, $CD = 3$, $\angle BAD = 150°$

① Приложим $\triangle DBC$ к DB стороной AC $(AC = DB)$. См рис 2, 4-уг $ABC'D$

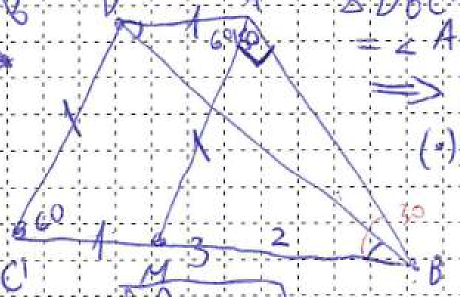


Рис. 2

$\triangle DBC' = \triangle DAC$, $(\angle DBC' = \angle ACD$, $C'B = 3$, $DB = AC)$. $\Rightarrow DC' = DA = 1$.

(·) $M \in C'B$, $MC' = 1$

т.к. $\angle ADB = \angle DBC'$ $(\angle ADB = \angle ACD = \angle DBC')$ то $AD \parallel BC'$ н/л DB – сек.

② ~~...~~, $AD = C'M$, $AD \parallel C'M \Rightarrow$
$\Rightarrow ADC'M$ – #, $MB = 3 - 1 = 2$, $AM = C'D = $ (т.к #) $= 1$.
т.к $AD \parallel BC'$, а $\angle DAB = 150° \Rightarrow \angle ABM = 30°$.

③ Посмотрим (рис 2) на $\triangle AMB$, $2AM = MB$, $\angle ABM = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle AMB$ – п/у $\triangle$ с $\angle 30°, 60°, 90° \Rightarrow \angle MAB = 90°$,
$\angle DAM = 150° - 90° = 60°$ т.к $\angle DAM = \angle DC'M$ (#)
то $\angle DC'M = 60°$, $\triangle C'DB = \triangle ADC \Rightarrow \angle ADC = 60°$.

④ Соединим 2 рисунка. (Теперь смотрим на рис. 3) $\angle DC'M = 60°$, ~~DAMC' – #~~
$DC' = C'M \Rightarrow \triangle DC'M$ – р/с $\triangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle C'DM = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ADM = 120 - 60 = 60°$, но
(угол # т.к. другой 60°)
и $\angle ADC = 60° \Rightarrow M$ – лежит на DC и $DM = 1 \Rightarrow MC = 2$

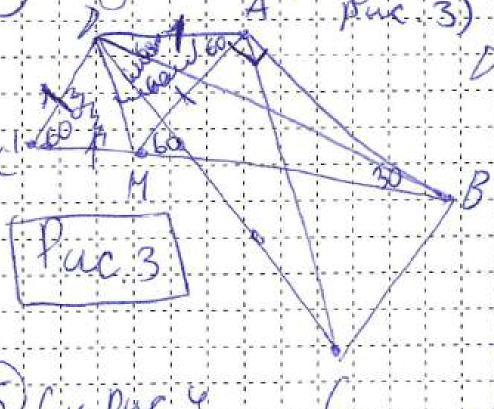


Рис. 3

⑤ См рис 4
$MB = MC = 2$,
$\angle DMC' = 60°$ ($C'DM$ – р/с$\triangle$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (верт$\angle$) $\angle BMC = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle MBC$ – р/с$\triangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{BC = 2}$

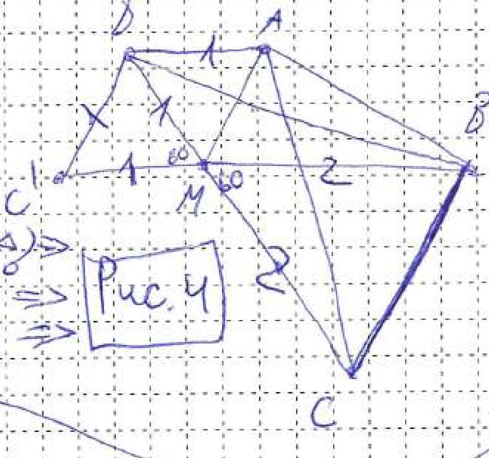


Рис. 4

Ответ: 2

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

p - простое

Ответ: нет

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(abc+1)p^2$

Посмотрим, какие делители может содержать первая скобка, поймем что хоть какая-то из 3-ех скобок $\vdots p$ т.к. оно простое и его нельзя разбить на множители. Пусть это 1-ая скобка тогда есть 2 варианта ① $ab+a+1 \vdots p^2$ ② $ab+a+1 \vdots p$. ~~Если 1-ый вариант~~, то тогда $ab+a+1$ может ещё содержать делители числа $abc+1$, тогда в 1-ом варианте $(bc+b+1)(ca+c+1) \leq abc+1$ (иначе $ab+a+1 = p^2k$, $(bc+b+1)(ca+c+1) \geq abc+1$ тогда равенство не выполнится). Это неверно, т.к. если раскрывать скобочки, все числа натуральные, минусов тут нет (~~и~~ $abc^2+bc^2+bc+ \dots + c+1$) это больше $abc+1$ т.к. $abc^2 \geq abc+1$, а мы еще прибавляем положит. $\Rightarrow$ 1-ый вариант невозможен. Поймем что 1 скобочка не может целиком $\vdots abc+1$. (Возьмем модуль) $bc+b+1 \vdots abc+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow bc+b+1 \geq abc+1 \Rightarrow b(c+1) \geq abc \xRightarrow{b \neq 0} c+1 \geq ac$ — это возможно только когда $a=1$. ~~Тогда~~
$(b+2)(bc+b+1)(2c+1)=(bc+1)p^2$ в этом случае $bc+b+1 \not\vdots bc+1$. Разберем 2-ой вариант: это невозможно?

<u>сейчас это неясно?</u>

и что дальше в этом случае?

~~ab~~ Пусть $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p$ ~~но этих есть хотя-то делители $abc+1$~~ $a(b+1)+1 \equiv_p 0 \Rightarrow a(b+1) \equiv_p -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \equiv_p -1\\ b+1 \equiv_p 1\end{cases}\\ \begin{cases}a \equiv_p 1\\ b+1 \equiv_p -1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \equiv_p -1\\ b \equiv_p 0\end{cases}\\ \begin{cases}a \equiv_p 1\\ b \equiv_p -2\end{cases}\end{array}\right.$$

Также $b(c+1) \equiv_p -1 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b \equiv_p -1\\ c+1 \equiv_p 1\end{cases}\\ \begin{cases}b \equiv_p 1\\ c+1 \equiv_p -1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b \equiv_p -1\\ c \equiv_p 0\end{cases}\\ \begin{cases}b \equiv_p 1\\ c \equiv_p -2\end{cases}\end{array}\right.$$

Если этот вариант то никакой из этих не подходит т.к. $b \not\vdots p \Rightarrow b \equiv_p -2$ но тогда $b \equiv -1 \Rightarrow a \equiv_p 1$, $b \equiv_p -2$, $b \equiv_p 1$, $c \equiv_p -2$
$\Rightarrow$ если $b \equiv_p -2 \equiv_p 1 \Rightarrow 3 \vdots p \Rightarrow p=3$, $a \equiv_3 1$, $b \equiv_3 1$, $c \equiv_3 1$, но
тогда ~~каждая скобка~~ $(1+1+1) \equiv_3 0$ ... $(ab+a+1)\dots(ca+c+1) = 9abc+9$
Можно раскрыть скобки и убедиться что ЛЧ значительно больше $\Rightarrow$ оба варианта не подходят $\Rightarrow$ таких чисел нет

Задача № ~~10~~ 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$p \neq 2$

Также найдем что a, b, c – чётные. Т.к.

Допустим, какие, и что из этого следует?

если вдруг неч. Пусть a то тогда (смотрим числа по mod 2) $(1\cdot 0+1+1)(0\cdot 0+0+1)(0\cdot 1+0+1) \underset{2}{\equiv}$ $\cancel{1\cdot 0\cdot 0+1}$ $0\cdot 1\cdot 1 \underset{2}{\equiv} 0$ но $\overset{1\cdot 0\cdot 0}{abc}+1 \underset{2}{\equiv} 1$

если a, b – неч. $(1\cdot 1+1+1)(1\cdot 0+1+1)(0\cdot 1+0+1) \underset{2}{\equiv}$

$\underset{2}{\equiv} 1\cdot 0\cdot 1 \underset{2}{\equiv} 0$, а $\overset{1\cdot 1\cdot 0}{abc}+1 \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow a, b, c$ – чет

если $p \neq 2$, если $p=2$ тогда $(ab+a+1)\ldots(ca+c+1)=4abc+4$

$2bc$?

очевидно $1 4 >$ т.к. там есть после раскрытия $4abc$, а остав. очев. >4. Получается таких чисел нет.

Задача № ~~10~~ 8 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Атласова Аделина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Утверждение неверно. Ответ: Нет

Рассмотрим все 24 [illegible]