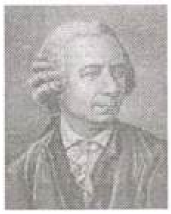


8

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

51 - 3Б
аудитория – посадочное место

41306243
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ ЕМ.	+ МС	− МК	
7 АЮ	7 ПР	7 АУ	0 АБ	21

№1

Давайте докажем, что Вася не мог получить по пятерке за каждое $k > 1$ и < 7. Предположим противное. Тогда, n представимо в виде 4 и в виде 2 послед. нат. чисел. Но, сумма 4 послед. чисел четна, т.к. в ней содержится ровно 2 нечетных числа, а сумма 2 последовательных чисел нечетна, т.к. в ней содержится ровно 1 нечетное число. Значит, n нечетное и четные одновременно. Противоречие!

Значит, он мог получить максимум 4 пятерки. Но получить 4 пятерки он мог. Нужно взять $n = 45$, и тогда, т.к. $n = 45 = 22+23 = 14+15+16 = 7+8+9+10+11 =$
$= 5+6+7+8+9+10$, он получит 4 пятерки.

Ответ: 4 пятерки

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306243 — номер участника

лист 2 из 5

№2

~~Д~~ Создадим граф, где вершинами будут кружки, ~~а ребрами будут дети~~ а 2 кружка будут соединены ~~ребром~~ ребром за каждого ученика, который ходит в оба из этих кружка. Во-~~пе~~ первых, заметим, что ~~каждый~~ если каждый ученик ходит в k кружков, то он создает ~~$k(k-1):2$~~ $\frac{k(k-1)}{2}$ ребер, т.к. для каждой пары кружков, которые он посещает, которых $C_k^2=\frac{k(k-1)}{2}$, он создает ребро. Во-вторых, ребер в графе $\frac{7\cdot6}{2}\cdot3=63$, т.к. по условию любые 2 кружка соединены 3 ребрами. Тогда, $63 \vdots \frac{k(k-1)}{2}$, т.к. ребер в графе ~~50~~ это и 63, и $x\cdot\frac{k(k-1)}{2}$, где x — кол-во учеников. Но, $\frac{k(k-1)}{2}$ может принимать только такие значения: $\frac{1\cdot0}{2}=0$, $\frac{2\cdot1}{2}=1$, $\frac{3\cdot2}{2}=3$, $\frac{4\cdot3}{2}=6$, $\frac{5\cdot4}{2}=10$, $\frac{6\cdot5}{2}=15$, $\frac{7\cdot6}{2}=21$ (k не больше 7, т.к. кружков всего 7). Из всех этих чисел $63 \vdots$ только на 1, 3, 21. ~~При~~ В этих случая x будет равным соответственно 63, 21, 3. 1-ое, и последнее не подходят, значит

$x=21$.

№3

~~Пусть $a \ge b \ge c$. Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \ge \frac{(b-1)^2}{a+c+1} \ge \frac{(c-1)^2}{a+b+1}$~~

~~Тогда, $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3(a-1)^2}{b+c+1}$.~~

~~Докажем, что $\le \frac{3(a-1)^2}{b+c+1}$~~

Докажем, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{1}{a+b+c+1}$. Тогда, аналогично мы сможем доказать $\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{1}{a+b+c+1}$ и $\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{1}{a+b+c+1}$, и оттуда будет следовать утверждение, которое нужно доказать. Т.к. числа положительны, ~~перемножим~~ перенесём знаменатели. Получится $(a-1)^2(a+b+c+1) \vee b+c+1$.

$(a-1)^2(a+b+c+1)=(a^2-2a+1)(a+b+c+1)=a^3+a^2b+a^2c+a^2-2a^2-2ab-2ac-2a+a+b+c+1=a^3+a^2b+a^2c-a^2-2ab-2ac-a+b+c+1$. Итого, нужно док., что $a^3+a^2b+a^2c-a^2-2ab-2ac-a+b+c+1 \le b+c+1$, или $a^3+a^2b+a^2c \le a^2+2ab+2ac+a$. Если $a=0$, то будет равенство, что нам и нужно, иначе можно сократить на a. Получится $a^2+ab+ac \le a+2b+2c+1 \Leftrightarrow (a+1-a^2)+2b-ab+2c-ac \ge 0$.

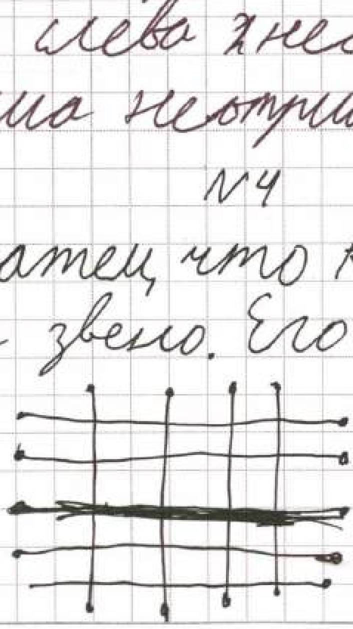
Во-первых, докажем, что $a-a^2 \ge -1$.

Предположим противное. Тогда,

$a+b+c-a^2-b^2-c^2=0$ по условию, или $(a-a^2)+(b-b^2)+(c-c^2)=0$, при этом $a-a^2<-1$, поэтому $(a-a^2)+(b-b^2)+(c-c^2)<(b-b^2)+(c-c^2)-1$. Значит, для определенности $b-b^2\geq 0{,}5$ (иначе $b-b^2<0{,}5$, $c-c^2<0{,}5$, и $(b-b^2)+(c-c^2)-1<0$ Противоречие!). Т.е. $b(1-b)\geq 0{,}5$. При этом, если $b=0{,}5+x$, то $b(1-b)=(0{,}5+x)(1-0{,}5-x)=(0{,}5+x)(0{,}5-x)=0{,}25-x^2\leq 0{,}25$. Противоречие! Значит $a-a^2\geq -1$, и $a-a^2+1\geq 0$. Теперь докажем, что $2b-ab$ и $2c-ac\geq 0$. Т.к. $b\geq 0$ и $c\geq 0$, то ~~нужно~~ достаточно доказать, что $2-a\geq 0$, или $a\leq 2$. Если это не так, то $a^2-a=a(a-1)>2(2-1)=2 \Rightarrow a-a^2<-2$. Противоречие! Значит, все 3 разности слева неотрицательны, значит их сумма неотрицательна! Ч.Т.Д.

№4

Докажем, что $k\leq 250$. Выберем любое звено. Его пересекают хотя бы



k звеньев, при этом прямые, содержащие звенья, параллельны.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306243 — номер участника

лист 5 из 5

~~Через Через какую-то из этих прямых~~ звеньев

~~Чер. Через которое из этих звеньев~~

~~п~~ Выберем среди этих звеньев ещё ~~одного~~ одно звено. Через него проходит k ~~зв~~звеньев, т.е. еще $k-1$ новое звено. Тогда заметим, что никакие из этих вершин не совпадают. А вершин у этих k звеньев $4k$. Но вершин всего $1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k \le 1000$, и $k \le 250$

не верно

Если всего 2 класса параллельных прямых, то вершины могут совпадать.

8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [✓] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [✓] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [✓] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

51 - 35
аудитория – посадочное место

41306243
номер участника

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

5	6	7	8	Σ
+ ВС	+ РХ	∅ А.П.	∅ МК	
7 МГ v	7 МС	∅ КА	∅ КА	14

№5

Во-первых заметим, что в одном квадрате 2x2 может находиться максимум 1 король. Разобьем доску 30×30 на 225 квадратиков 2x2. В каждом квадратике может быть ~~только~~ максимум 1 король, ~~при этом т.к.~~ следовательно т.к. королей 220, ровно 5 квадратов 2x2 будут пустыми. ~~Какой~~

Заметим, что как бы не располагался квадрат 9x9, в нем будет ровно ~~16 квадратиков 2x2~~ 16 полных квадратов 2x2. И максимум в пяти из них не будет королей. Тогда, во всех остальных квадратиках короли будут. Значит в каждом квадратике будет хотя бы 16-5=11 королей

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

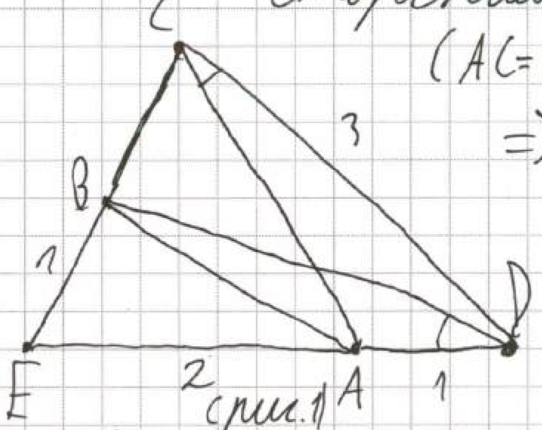
41306243 — номер участника

лист 2 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

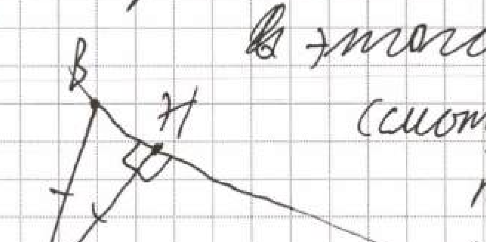
№ 2

Отметим т. E на прямой AD за т. A так, чтобы AE = 2. Тогда, △ACD = △BDE по 2-ум сторонам и углу между ними (AC = BD, CD = 3 и AD + AE = 3, ∠BDE = ∠ACD). => => BE = AD = 1. Т.к. ∠BAD = = 150°, то ∠BAE = 180 − ∠BAD = = 30°. Докажем, что в треуг., где напротив



(рис. 1)

угла в 30° находится сторона, которая вдвое меньше другой стороны этого треугольника, то напротив другой стороны лежит угол в 90°. Для этого проведем высоту H из т. A (смотрите рис. 2). Т.к. в прямоуг. треуг. против ∠30° лежит сторона вдвое меньше гипотенузы. Тогда, AH = AB, и в △ р/б △ABH при основании ∠90° => т. B совпадает с т. H.



(рис. 2)

Вернемся к рис. 1. Мы доказали, что ∠EBA = = 90° => ∠BEA = 180° − ∠EBA − ∠BAE = 60°. Т.к. △EBD = △ADC, то ∠CDA = ∠BED = 60°. Тогда △CED − р/б (CD = ED) с углом

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 41306243 лист 3 из 4

класс номер участника

60° $\Rightarrow$ он правильный. ~~Также~~, $\Rightarrow \angle CED = 60^\circ$.

Но, т.к. $\angle BED$ тоже $=60^\circ$, то т. B, C и E лежат на одной прямой. А, т.к. $EC = ED = 3$, то $BC = EC - BE = ED - BE = 3 - 1 = 2$. Значит, $BC = 2$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306243 — номер участника

лист [illegible] из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2