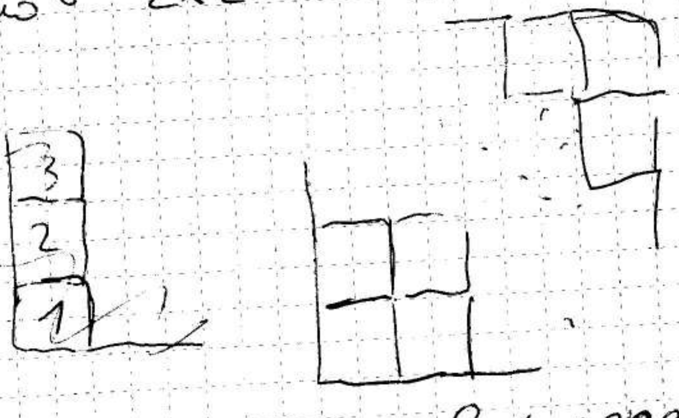
Задача № ~~4~~ 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Чикилев Семен

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте разобьём доску 30×30 на 225 квадратиков 2×2



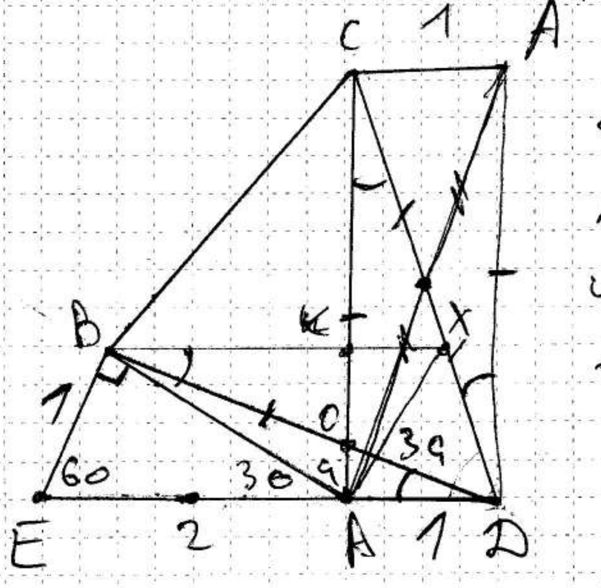
Заметим, что в каждом из квадратов стоит ≤ 1 короля, т.к. иначе 2 короля будут бить друг друга, что противоречит условию.

Также заметим, что любой квадрат 9×9 содержит 16 отмеченных квадратиков. Если в каком-то из квадратов 9×9 ≤ 10 королей, то в оставшихся $\ge 225-16=209$ квадратиков, и их стоит $\ge 220-10=210$ королей; по принципу Дирихле, если у нас 209 квадратиков и ≥ 210 королей $\Rightarrow$ ≥ 2 королей стоит в каком-то квадратике $\to$ противоречие.

Мы предположили, что возможна ситуация где в каком-то квадратике 9×9 ≤ 10 королей, нашли там противоречие $\Rightarrow$ в каждом квадрате 9×9 ≥ 11 королей — ч.т.д.

Задача № 8б Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Чичилев Степан

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



~~Построим~~

Достроим $\triangle ADC$ до ▱ получим $ACA'D$ - пар-м $\Rightarrow CA'=1$

$AD=CA=BD$

отмеченные на рис. $\angle$ равны из усл. и ~~симметрии~~ параллельности

построим т. E на луче DA так, что $EA=2$ $\angle BAE=180-150=30°$, также $\triangle BDE=\triangle CA'D$ по 1-ому признаку $\Rightarrow$

$\Rightarrow BE=1$ ✓

$EA=2$ $BE=1$ $\angle BAE=30° \Rightarrow \triangle BAE$ – „30 60 90"

проведем из B прямую $\parallel AD$

X – это пересечение этой прямой с CD?

$\angle XBD=\angle BDA$

пусть $CA=3l$, $OA=a$

заметим, что $\triangle DOA \sim \triangle CDA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CD}{DA}=\frac{OD}{OA}=3 \Rightarrow OD=3a$ ✓

$BO=3l-3a$ $\triangle BKO \sim \triangle DAO$ по 2 углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow OK/BO=a/3a \Rightarrow OK=l-a \Rightarrow$

$\Rightarrow CK=2l$, по т. Фалеса $CK/KA=CX/XD=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CX=2$ $XD=1$

$BX \parallel ED$ $BE=XD \Rightarrow$ ~~$\angle ADE$~~ $EBXD$ - р/б трапеция $\Rightarrow \angle XDE=60=\angle BEA$

Задача № 2 б Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Чичаев Степан

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$XD = XA$, $\angle XDA = 60^\circ \Rightarrow XA = XD = AD = 1$,

так-это следствие или условие?

$\angle XAD = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $EB \parallel XA$, т.к. $\angle XAD = \angle BEA$ и

$BE = XA \Rightarrow EBXA$ - пар-м $\Rightarrow BX = EA = 2$ ✓

$CX = BX = 2$, $\underline{\angle CXB} = \angle CDA = \underline{60^\circ}$ из параллельности $\Rightarrow \Delta CXB$ - равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB = CX = BX = 2$

Ответ: $BC = 2$

Задача № ~~8~~ 7 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Чикилев Степан

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$$\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1}=p^2$$

Заметим, что $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)>(abc+1)^2$ раскрыв скобки, тогда

$p^2>abc+1$

либо ~~$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)\,\vdots\,p^3$~~

$abc+1\,\vdots\,p$

1) ~~$ab+a+1$~~ ~~$ab+a\underset{p}{\equiv}-1$~~

~~$bc+b\underset{p}{\equiv}-1$~~

~~$ca+c\underset{p}{\equiv}-1$~~

Заметим, что если БОО: (Лемма)

$\begin{cases} ab+a+1\,\vdots\,p \\ bc+b+1\,\vdots\,p \end{cases} \Rightarrow ca+c+1\,\vdots\,p$

док-во:

$a(b+1)\underset{p}{\equiv}-1 \rightarrow b\equiv\frac{-1}{a}-1\equiv\frac{-(1+a)}{a}$ Почему так можно?

$b(c+1)\underset{p}{\equiv}-1 \rightarrow c\equiv\frac{-1}{\frac{-(1+a)}{a}}-1\equiv\frac{-1}{1+a}$

$c(a+1)\equiv\frac{-1}{1+a}\cdot(1+a)\equiv-1$ – ч.т.д.

тогда будем разбирать 2 варианта:

1) $abc+1\,\vdots\,p$

2) $abc+1\,\not\vdots\,p$

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

1) $abc+1 \vdots p \Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^3$

по лемме

либо $ab+a+1 \vdots p^3$, остальное нет (БОО)

$ab+a+1 \vdots p^3 \to abc+1 \geq p^2$ - противоречие

либо

$ab+a+1 \vdots p$ $\quad b \equiv_p \frac{-(1+a)}{a}$

$bc+b+1 \vdots p$ $\quad c \equiv_p \frac{-1}{1+a}$

$ca+c+1 \vdots p$

$abc+1 \equiv_p a \cdot \frac{-(1+a)}{a} \cdot \frac{-1}{1+a} + 1 \equiv_p 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \vdots p \to p=2 \Rightarrow$ ~~abc~~ $abc+1 < 4$

Перебираем 1,1,1 1,1,2 ~~…~~, 44

один не подходит $\Rightarrow$ вариант невозможен

2) $abc+1 \vdots p$ $\quad (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^2$

либо $(ab+a+1)$ ~~(…)~~ $\vdots p^2$ (БОО)

либо какие-то 2 скобки $\vdots p \Rightarrow$ по лемме 3 скобки $\vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^3$ - невозможный случай

$ab+a+1 \vdots p^2$

если $c \geq 2 \to abc+1 \geq p^2$ - противоречие

Задача № 3 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Чижилев Степан

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

если $ab+a+1 \geq 2p^2 \Rightarrow abc+1 \geq p^2$, т.к.

$a < \frac{1}{2}(ab+a+1) \Rightarrow ab+1 \geq p^2 \Rightarrow abc+1 \geq p^2$

$ab+a+1=p^2$

$c=1$

$(ab+a+1)(2b+1)(a+2)=p^2(abc+1)$

$(2b+1)(a+2)=abc+1=ab+1$

$(2b+1)(a+2)=2ab+a+4b+2>ab+1$

противоречие.

мы предположили, что такая ситуация возможна, что

$$\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1}=p^2$$

мы разобрали все случаи, в каждом получили противоречие $\Rightarrow$ такая ситуация не является невозможной

Ответ: нет, не может

если $abc+1<4$

1) $a=b=c=1 \Rightarrow (1+1+1)(1+1+1)(1+1+1) \not\vdots\ 1\cdot1\cdot1+1$

2) $a=b=1$ $c=2$ $(1\cdot1+1+1)(1\cdot2+1+1)(2\cdot1+2+1)=$

$=60$ $\quad 60:(1\cdot1\cdot2+1)=20\neq p^2$

+.

Задача № 4 8 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Чичилев Степан

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: да, может нет

Пример:

гирьки от 450г до 499г