11:00-11:05; 12:35-12:39

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ДАВЛЕТБАЕВА

Имя: АЛЬМИРА

Отчество: МАРСЕЛЕВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Татарстан

4. Контактный телефон +79196958309

5. Контактный электронный адрес brightflame110911@gmail.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Задача 1. Ответ: 4. Оценка:
Заметим, что если n 2-хорошее, то $n = a_2 + a_2 + 1 = 2a_2 + 1$ для нек-ого натурального $a_2 \Rightarrow n \not\vdots 2$
Если же n 4-хорошее, то $n = a_4 + a_4 + 1 + a_4 + 2 + a_4 + 3 = 4a_4 + 6$ для нек-ого натурального $a_4 \Rightarrow n \vdots 2$.
Тогда n не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим.
Всего натуральных чисел, больших 1 и меньших 7, 5. Выше мы уже вывели, что за все 5 этих чисел Вася не мог получить 5 пятерок.
Следовательно, ~~т~~ пятерок он получил не более 4.
Пример:
Пусть Вася придумал $n = 45$. Тогда n:
2-хорошее: $45 = 22 + 23$
3-хорошее: $45 = 14 + 15 + 16$
5-хорошее: $45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$
6-хорошее: $45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
Что нам и требовалось.

Задача № 2 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Дакетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

2 задача.
Пусть учеников в классе K и каждый ученик посещает a кружков.
Введём граф, где каждая вершина - это ученик или кружок. И две вершины соединены ребром, если эти две вершины соответствуют ученику и кружку, таких, что этот ученик ходит в ~~этом~~ этот кружок.
Граф будет двудольным.
Будем считать количество галочек (Λ), таких, что главная вершина в них - ученик. (Следовательно, две неглавные вершины - кружки.)
Тогда с одной стороны их $C_7^2 \cdot 3$, т.к. для каждой пары кружков есть ровно две таких галочки. С другой стороны их $C_a^2 \cdot K$, т.к. таким образом мы для каждого ученика посчитали кол-во таких галочек, в кот-ых он участвует ($\text{т.е. } C_a^2$). И умножили на кол-во учеников. Тогда:
$C_a^2 \cdot K = C_7^2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{a(a-1)K}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3}{2} = 63$
$a(a-1)K = 126$. Следовательно K является делителем 126. $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow$ делителей всего 12. Выпишем их:
1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126.
K больше 6 ~~...~~ и меньше $60 \Rightarrow K$ равно одному из этих чисел: 7, 9, 14, 18, 21, 42. Для каждого из них посмотрим, чему будет равно $a(a-1)$:
1) $K = 7 \Rightarrow a(a-1) = 18$, но ~~делителем 18 это 1~~, 18 в виде произведения двух натуральных мы можем только как-ми

Задача № 2 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

способами: $1\cdot18$, $2\cdot9$, $3\cdot6$. Среди этих пар нет двух подряд идущих чисел.

2) $k=9 \Rightarrow a(a-1)=14$. Но 14 можем представить только такими образами: $1\cdot14$, $2\cdot7$. Среди этих пар тоже нет двух подряд идущих.

3) $k=14 \Rightarrow a(a-1)=9$. 9 можем представить только такими способами: $1\cdot9$; $3\cdot3$. Среди этих пар тоже нет двух подряд идущих.

4) $k=18 \Rightarrow a(a-1)=7$. 7 можем представить только в виде $1\cdot7$, это тоже не подряд идущие числа.

5) $k=21 \Rightarrow a(a-1)=6$. 6 можно представить в виде $2\cdot3 \Rightarrow$ в этом варианте на этом этапе противоречий нет.

6) $k=42 \Rightarrow a(a-1)=3$. Но 3 можно представить только в виде $3\cdot1$, а это не подряд идущие числа.

Противоречий не было только во варианте $k=21$, а значит ответ 21, (т.к. хотя бы один ответ есть.)

(В решении мы считали, что и a, и $a-1$ натуральные, и так действительно можно считать, т.к. $a\in\mathbb{N}$ и при $a=1$ галочек вообще не будет, что нам не подходит.)

Задача № 3 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

3 задача

Докажем ~~утверждение~~ следующий факт:

Если нам дана ~~правильная дробь~~ дробь $\frac{x}{y}$, такая, что $x \geq 0$, $y > 0$, $x \leq y$, то при прибавлении $K \geq 0$ к числителю и знаменателю дробь не уменьшается, т.е.

$\frac{x}{y} \overset{?}{\leq} \frac{x+K}{y+K}$ ~~[illegible]~~ $/ \times y \times (y+K)$, т.к. $y > 0$, $y+K > 0$.

$xy + xK \overset{?}{\leq} xy + yK$ $/ -xy$

$xK \overset{?}{\leq} yK$ ~~$/ : K$, т.к. $K \Rightarrow$~~

либо $K = 0 \Rightarrow$ будет равенство, либо $K \neq 0 \Rightarrow K > 0 \Rightarrow$ можем поделить. $x \overset{?}{\leq} y$, а это нам дано.

$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \overset{?}{\leq} \frac{3}{1+a+b+c}$$

Докажем, что $(a-1)^2 \overset{?}{\leq} b+c+1$

$a^2 - 2a + 1 \overset{?}{\leq} b+c+1$

$a^2 + 1 \overset{?}{\leq} 2a + b + c + 1 = a^2 + b^2 + c^2 + a + 1$

~~a^2 $0 \overset{?}{\leq} b^2 + c^2 + 1a$, что верно.~~

$0 \leq b^2 + c^2 + a$, что верно.

Аналогично $(b-1)^2 \leq c+a+1$ и $(c-1)^2 \leq a+b+1$.

Тогда воспользуемся утв-ем выше и заметим, что следующие нер-ва верны:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2 + a}{a+b+1+c}; \quad \frac{(b-1)^2}{c+a+1} \leq \frac{(b-1)^2 + b}{a+b+c+1};$$

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{(c-1)^2 + c}{a+b+c+1}$$

Задача № 3 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Тогда

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+a+b+c}{a+b+c+1}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}\;/\;$$ чтд

Задача № 4 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

4 задача

Оценка на 250:

Давайте будем смотреть на множество различных направлений, кот-ые есть у наших звеньев. Заметим, что для каждого направления, кот-ое есть среди наших звеньев есть $\geq K$ звеньев с ~~...~~ ним. (т.к. если посмотреть на какое-то звено a, то есть звено b, перпендикулярное ему, (если $K>0$, если $K=0$ то утв-ие точно верно), а у звена b еще $\geq K-1$ звеньев, кот-ые перпендикулярны b $\Rightarrow$ параллельны a). Тогда всего направлений $\leq \frac{1000}{K}$. (направлений у звеньев, про кот-ые мы говорили выше, опр-ся так: если два звена параллельны, то у них одно направление, если непараллельны, то разные). Если $K>250$ то направлений ≤ 3. Но заметим, что ровно 3 направления быть не может, т.к. на самом деле их можно разбить на пары такие, что в каждой паре напр-ия перпендикулярны. Тогда направлений ≤ 2, но ровно 1 быть не может $\Rightarrow$ их ровно 2. Можно считать, что ~~звена~~ длина кажд. ~~звена~~ звена равна 1. Введем клетчатую плоскость, такую, что ≥ 1 звено ломаной является стороной квадрата сетки. Тогда, на самом деле, все звенья будут сторонами квадрата сетки, т.к. длина каждого звена $=1$ и два направления, кот-ые присутствуют, перпендикулярны. Тогда два звена просто не могут пересечься. Противоречие $\Rightarrow$ изнач. утв. было неверным $\Rightarrow K \leq 250$.

11:19 - 11:23; 12:43 - 12:46

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ДАВЛЕТБАЕВА

Имя: АЛЬМИРА

Отчество: МАРСЕЛЕВНА

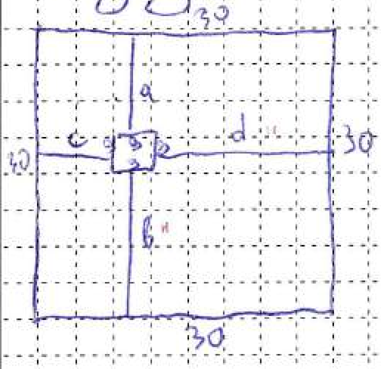
заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Татарстан

Задача № 5 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

5 задача

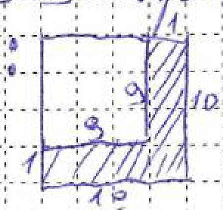


Рассмотрим нек-ый квадрат 9×9 (в клеточках)

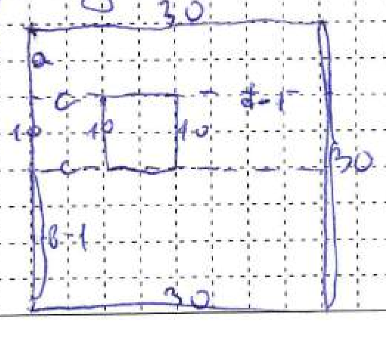
Обозначим расстояния от сторон квадрата 9×9 до сторон квадрата 30×30 как a, b, c, d (показано на рисунке.) Тогда ровно одно из чисел a и b яв-ся ~~чётным~~ нечетным. НУО скажем, что это b. И ровно одно из чисел c и d является нечётным. НУО скажем, что это d.

Тогда давайте разобьем всю оставшуюся (т.е. без квадрата 9×9) доску на части следующим образом:

~~Вокруг~~ Около квадрата 9×9 вырежем уголок со стороной 10, т.е. такой:



Уголок вырежем так, чтобы он пересек отрезки длины b и d на рисунке. Вся оставшаяся ~~поле~~ доска после этого разбивается на квадраты 2×2. (Т.к. можно теперь ~~сказать~~ сказать, что мы вырезали квадрат 10×10 из неё и разбить всю ост доску на прямоугольники с чётными сторонами таким образом:



т.е. прямоугольники будут $a \times 30$, $c \times 10$, $(d-1) \times 10$, $(b-1) \times 30$

Задача № 5 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

В каждом квадрате 2×2 может стоять не более одного короля. Всего квадратов 2×2 $\frac{30\cdot30-40\cdot10}{4}=200$. Докажем, что в уголке может стоять не более 9 королей:

Разобьем его на доминошки и один уголок из 3 клеток так, как показано на рисунке. Всего фигур 9 и в каждой не более одного короля.

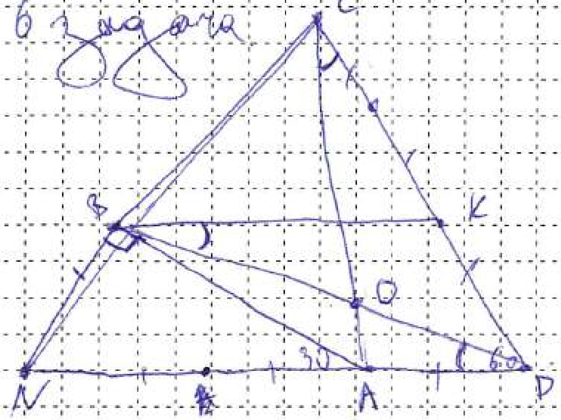
~~Тогда во всей доске без к~~

Тогда в оставшейся доске (без квадрата 9×9) стоит не более 209 королей $\Rightarrow$ в квадрате ≥ 11, что

Задача № 6 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

6 задача



Докажем, что $BC = 2$

O – точка пересечения диагоналей четырехугольника.

K – точка на CD такая, что $DK = 1$

$$\left.\begin{matrix}\angle ODA = \angle ACD \\ \angle OAD = \angle DAC\end{matrix}\right\} \triangle DOA \sim \triangle CDA \Rightarrow OD \cdot AC = AD \cdot DC$$

$$OD \cdot BD = OD \cdot AC = AD \cdot DC = DK \cdot DC$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{OD}{DC} = \frac{DK}{BD} \\ \angle BDK = \angle CDO\end{matrix}\right\} \triangle CDO \sim \triangle BDK$$

тогда $\angle KBD = \angle DCA = \angle BDA \Rightarrow BK \parallel AD$.

На продолжении AD за точку A ~~выберем~~ отметим такую точку N, что $NA = 2$

$$\left.\begin{matrix}ND = 3 = CD \\ BD = AC \\ \angle BDN = \angle ACD\end{matrix}\right\} \triangle BDN = \triangle ACD$$

$BN = AD = DK$ и $BK \parallel DN$ и $\angle BND = \angle KDN$ (из равенства треуг.)

Помимо этого $\triangle ABN$ у нас такой, что угол $\angle BAN = 30^\circ$, $2 = AN = 2BN = 2$. Это значит что $\angle NBA = 90^\circ$ (т.к. можем построить угол 30°, на одной стороне отложить отрезок $= 2$, и, с центром в пол-ся точке, построить окр-ть с радиусом 1. Вторую сторону угла она пересечёт только в одной точке, т.к. угол 90°.)

(т.е. треугольник удовлетвор-ий таким услов. единств-ый)

$\Rightarrow \angle BNA = 60^\circ$

Задача № 6 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Тогда $BKDN$ – р/б трапеция с углом при основании DN $60°$

$\angle NDC = 60°$, $DN = DC \Rightarrow NCD$ ~~[illegible]~~ р/с

Тогда точка C лежит на серпере к ND и на прямой KD. И, поскольку $NBKD$ р/б трапеция, то C – это точка пересечения боковых сторон $\Rightarrow N, B, C$ лежат на одной прямой.

$BC = NC - NB = 3 - 1 = 2$, чтд

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

7 задача

Предположим, что может.

Тогда

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(abc+1)\cdot p^2$, где p это нек-ое простое число.

Посмотрим на нек-ое q, на которое делится $abc+1$ (q - простое). Предположим, что на него делятся хотя бы 2 скобки из левой части.

НУО $ab+a+1 \vdots q$

$bc+b+1 \vdots q$

$abc+1 \vdots q$

$abc \equiv_q -1 \quad a(b+1) \equiv_q -1$

-1 взаимно прост с $q \Rightarrow bc$ и $b+1$ взаимно просты с q. Тогда можно использовать дробные вычеты с этими знаменателями

$a \equiv_q \frac{-1}{bc} \quad a \equiv_q \frac{-1}{b+1} \Rightarrow bc \equiv_q b+1 \Rightarrow bc-b \equiv_q 1$

Помимо этого из делимости выше следует, что $bc+b \equiv_q -1$. Вычтем из ~~второго~~ последнего сравнения предпоследнее:

$2b \equiv_q -2$. Если $q \neq 2$, то $b \equiv_q -1$. Но это значит, что $b+1 \vdots q$, т.е. $a(b+1) \equiv_q 0$, а не с -1.

Если $q=2$: $abc+1 \vdots 2 \Rightarrow a \not\vdots 2, b \not\vdots 2, c \not\vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+a+1$ это сумма трех нечетных, т.е. нечетное. Аналогично с каждой скобкой. Т.е. q не может быть равно 2. Т.е. если $abc+1 \vdots$ на нек-ое простое, то оно есть лишь в одной из

Задача № 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Давлетбаева Альмира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

скобок левой части. Заметим, что произ-ие любых двух из трех скобок содержит в своем разл-ии $abc+1$ и еще сл. $\Rightarrow$ оно $> abc+1$.

на слагаемые после раскрытия скобок

Далее смотрим на p. Заметим, что не может быть такого, что одна из скобок левой части $\vdots p^2$, т.к. иначе произведение двух оставшихся будет $\leq abc+1$ (т.к. в таком случае $abc+1 \vdots$ на произ-ие оставшихся). Следовательно, на p делятся ≥ 2 скобки. Это ~~одно~~ означает, что $abc+1$ не может $\vdots p$ (по утв-ям ранее). Т.е. p входит в обе части ровно во 2 степени.

НУО пусть $ab+a+1 \vdots p$ и $bc+b+1 \vdots p$

$ab+a+1=(a+1)(b+1)-b$

$bc+b+1=(b+1)(c+1)-c$

$(a+1)(b+1) \underset{p}{\equiv} b$ $\quad a+1 \not\vdots p$, т.к. иначе $b \vdots p \Rightarrow bc+b+1 \not\vdots p$

$(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} c$ $\quad c+1 \not\vdots p$, т.к. иначе $c \vdots p \Rightarrow c+1 \not\vdots p$

Тогда можем рассмотреть дробные ~~вычеты~~ вычеты с этими знаменателями.

$b+1 \underset{p}{\equiv} \frac{b}{a+1}$; $b+1 \underset{p}{\equiv} \frac{c}{c+1}$

$\frac{b}{a+1} \underset{p}{\equiv} \frac{c}{c+1} \Rightarrow bc+b \underset{p}{\equiv} ac+c$, но

$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow ca+c+1$ тоже должно $\vdots p$, но оно не может $\vdots p$, т.к. в таком случае степень вхождения p в левую часть ≥ 3.

Противоречие, значит изначальное утв-ие было неверным.