Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Егоров Кирилл

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Если n является k-хорошим для некоторого чётного k. И будем обозначать степень вхождения простого p в натуральное a, как $\nu_p(a)$, тогда n представляется в виде суммы $a_1, a_1+1, \dots, a_1+k-1$, тогда

$n = \frac{(a_1+a_1+k-1)\cdot k}{2}$ (сумма арифм. прогресс.),

тогда т.к. $k \vdots 2$, то $2a_1+k-1 \not\vdots 2$, т.к. $2a_1 \vdots 2, k \vdots 2$ и $-1 \not\vdots 2$

$n = (2a_1+k-1)\cdot\frac{k}{2}$, где $\frac{k}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ т.к. $(2a_1+k-1)$ нечётно, то $\nu_2(2a_1+k-1)=0$, то $\nu_2(n)=\nu_2(\frac{k}{2})=\nu_2(k)-1$

Рассмотрим числа >1 и <7, это 2, 3, 4, 5 и 6. Заметим, что если n представимо в виде 4 слагаемых, то n не представимо в виде 2 и 6 слагаемых т.к. если n k-хорошее для k=4, то $\nu_2(n)=1$, а если n k-хорошее для k=2 или k=6, то $\nu_2(n)=0$, а $\nu_2(n)$ - постоянно для определённого $n \Rightarrow$ Вася мог получить ≤ 4 пятёрок т.к. ~~Вася не может~~ найти не существует n k-хорошего для k=2 и k=4 одновременно.

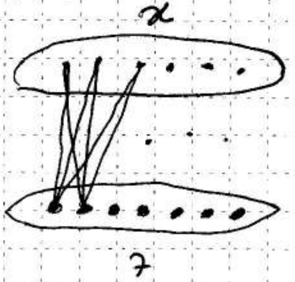
Пример: $n = 45 = 22+23 = 14+15+16 = 7+8+9+10+11 = 5+6+7+8+9+10+11$.

Ответ: 4.

Задача № 2 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Егоров Кирилл

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Представим в виде двудольного графа, где одна доля это кружки и каждому кружку соотвествует вершина, втора доля это ученики и каждому школьнику соответствует вершина и проводим ребро, если ученик посещает кружок, тогда: Пусть x учеников.



Тогда будем считать „галочки", такие что „галочка" опирается на кружки и одна вершина ~~кня~~, у которой степень 2 в галочке будет учеником, тогда Пусть каждый ученик посещает ровно y кружков, тогда

С одной сторон галочек $C_7^2 \cdot 3$, т.к. на каждую пару кружков опирается 3 галочки, а с другой и $C_y^2 \cdot x$, т.к. ~~из~~ из каждого ученика C_y^2 галочек. тогда

$C_y^2 \cdot x = C_7^2 \cdot 3 = 21 \cdot 3 = 63 \Rightarrow C_y^2 \cdot x = 63$, тогда x - делитель 63, при чём >6 и $<60 \Rightarrow$ x может принимать значения 7, 9 и 21, т.к. это все делители 63 >6 и $<60 \Rightarrow$

Если $x=7 \Rightarrow C_y^2 = 9 \Rightarrow y^2 - y = 18 \Rightarrow y^2 - y - 18 = 0$ $y_1 = \frac{1+\sqrt{73}}{2}$

$D = 1+72 = 73 \Rightarrow y_2 = \frac{1-\sqrt{73}}{2}$

!!?, т.к. тогда $y \notin \mathbb{N}$

Задача № 2 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Егоров Кирилл

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Если $x=9 \Rightarrow C_y^2=7 \Rightarrow y^2-y=14 \Rightarrow y^2-y-14=0$

$D=1+56=57$ – не точный квадрат $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $y_1=\frac{1+\sqrt{57}}{2}$, $y_2=\frac{1-\sqrt{57}}{2}$, то $y\notin \mathbb{N}$ –?!

Если $x=21 \Rightarrow C_y^2=3 \Rightarrow y^2-y=6 \Rightarrow y^2-y-6=0$

$D=1+24=5^2 \Rightarrow$

$y_1=\frac{1+5}{2}=3$ – подходит т.к. $3\in \mathbb{N} \Rightarrow$ в классе

$y_2=\frac{1-5}{2}=-2$ –?!, т.к. $-2\in \mathbb{N}$ может быть только

~~Пример на $x=21$ и $y=3$:~~ 21 ученик.

~~Рассмотрим все возможные пары кружков, их ровно $C_7^2=21$, тогда занумеруем пары за 1, 2, ..., 21.~~

~~Занумеруем учеников за~~

~~Обозначим учеников за $a_1, a_2, \dots, a_{21}$, тогда Проведём рёбра между парой 1 и a_1, a_2, a_3, парой 2 и $a_2, a_3, a_4, \dots$, парой 19 и a_{19}, a_{20}, a_{21}, парой~~

~~Ответ: 21~~ Пример занумеруем кружки за 1, 2, ..., 7, а учеников обозначим за $a_1, a_2, \dots, a_{21}$, тогда ходят на кружки:

1: $a_1, a_2 \dots a_9$

2: $a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{15}$

3: $a_1, a_2, a_3, a_{16}, a_{17}, \dots, a_{21}$

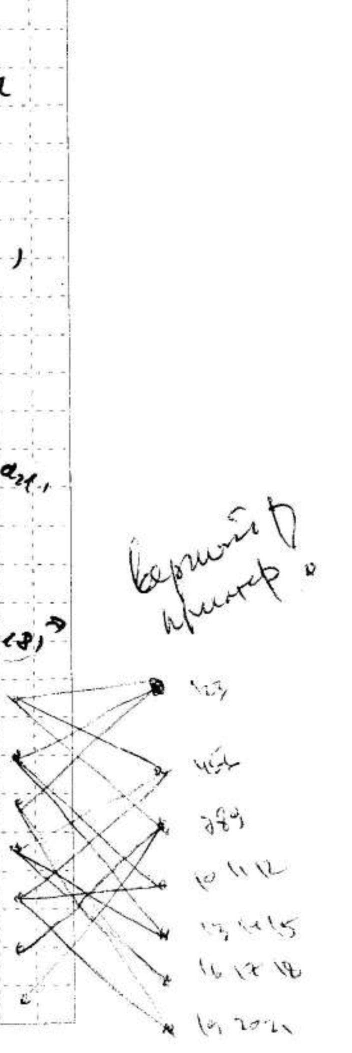
4: $a_4, a_5, a_6, a_{13}, \dots, a_{18}$

5: $a_4, a_5, a_6, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{19}, a_{20}, a_{21}$

6: $a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{13}, a_{14}, a_{16}, a_{19}, a_{20}$

7: $a_7, a_8, a_9, a_{11}, a_{12}, a_{15}, a_{17}, a_{18}, a_{21}$?!

Корявый пример



Ответ: 21.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Егоров Кирилл

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Заметим, что $a^2+b^2+c^2+c \geq c^2 \Rightarrow a+b+2c+1 \geq c^2+1 \Rightarrow$

$a+b+1 \geq c^2-2c+1 \Rightarrow a+b+1 \geq (c-1)^2$, аналогично

$a+c+1 \geq (b-1)^2$

$b+c+1 \geq (a-1)^2$

Заметим, что ~~всегда~~ если $\frac{x}{y} \leq 1$, и ~~$x,y \geq 0$~~ $x \geq 0$, $y>0$, то $\frac{x}{y} \leq \frac{x+a}{y+a}$, где $a \geq 0$, т.к.

$x(y+a) \leq y(x+a)$, т.к. $xa \leq ya$, т.к. $x \leq y$, т.к. $\frac{x}{y} \leq 1$

тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{(c-1)^2}{a+b+1} &\leq \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} = \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1} \\ \frac{(b-1)^2}{a+c+1} &\leq \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} = \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1} \\ \frac{(a-1)^2}{b+c+1} &\leq \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} = \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{(c-1)^2}{a+b+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(a-1)^2}{b+c+1}} \ \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq$$

$$\leq \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1} + \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1} + \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1} = \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{3}{a+b+c+1}$$ – чтд.

+