Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 70

Ответ: 4. Больше 5 нельзя т.к. от ~~2~~ 2-хорош до 6-хорош. $\stackrel{5}{\cancel{6}} \leq 5$.

Докажем, что 5 ~~их~~ нельзя:

Тогда ~~Пусть~~ ~~он~~ n и 2-хорош. и 4-хорош, тогда:

$a_2 + a_2 + 1 = a_4 + a_4 + 1 + a_4 + 2 + a_4 + 3$

$2a_2 + 1 \not\vdots\, 2 \qquad 4 \cdot a_4 + 6 \,\vdots\, 2$

(?!). ✓

Пример:

$n = 45$.

$45 = 22 + 23$, $45 = 14 + 15 + 16$, $45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$, ~~45~~

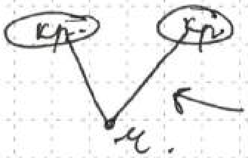
$45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$. ✓.

7 ТМ

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 70

Будем смотреть за кол-вом таких соединений, чтобы 2 кружка были соед. с 1 человеком

(Рисуем граф, если человек есть в кружке — проводим ребро, если нет, то нет)

Т.е.  (Назов. это повторюшкой)

← кол-во таких штук, т.е.

даже если какой-то человек посч. несколько раз, нам интересно кол-во таких связок.

Посчитаем со стороны кружков: между любыми 2-мя ровно 3 таких повторюшек.

Тогда их число: $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3 = 63$. (Никакие 2 не посч. 2 раза, т.к. каждая повт. прикреплена к ровно 2-м кружкам)

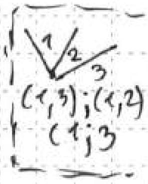
Посчитаем со стороны людей:

Пусть в классе n людей и из каждого выходит t рёбер, тогда разберём случаи:

$t=1$ ⊗ (у ≥1 должно быть ≥2 ребра)

$t=2$ => каждый человек приносит 1 повт.:

тогда $1\cdot n = 63 \Rightarrow n = 63 > 60$ (?!).

$t=3$ => каждый человек приносит 3 повт.: 

$3\cdot n = 63 \Rightarrow n = 21$ ✓.

$t=4$ => каждый человек приносит $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ повт.:

$6\cdot n = 63$, $n \notin \mathbb{N}$ (?!).

$t=5 \Rightarrow \frac{5\cdot 4}{2}\cdot n = 10\cdot n = 63$, $n \notin \mathbb{N}$ (?!)

$t=6 \Rightarrow \frac{6\cdot 5}{2}\cdot n = 15\cdot n = 63$, $n \notin \mathbb{N}$ (?!)

$t=7 \Rightarrow \frac{7\cdot 6}{2}\cdot n = 21\cdot n = 63 \Rightarrow n = 3 \leq 6$ (?!).

Ответ: 21.

(Пример сказали приводить не нужно)

(Если, что то просто 21 делим на 7 групп по 3 и распределяем каждую на тройку из 7-ми кружков)

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № ~~В~~3 Лист 1 из 2   Номер участника: 70

$1+b+a+c=t.$

Наверное это решение верное но если прочесть, так что читай ше его: (смотри вторую стр.)

$$\frac{(a-1)^2}{t-a}+\frac{(b-1)^2}{t-b}+\frac{(c-1)^2}{t-c}\le\frac{3}{t}$$

$\leftarrow a$ $b\rightarrow$ $a+b=const \Rightarrow a\,t-const$

(!) $f(a)=\frac{(a-1)^2}{t-a}$ – выпуклая (вверх $\smile$)

~~$f(a)'=\frac{(2a-2)(2-a)+(a-1)^2}{(2-a)^2}=4a-2a^2-4+2a+a^2-2a+1$~~

$f(a)'=\frac{(2a-2)(t-a)+a^2-2a+1}{(t-a)^2}=\frac{2at-2a^2-2t+2a+a^2-2a+1}{(t-a)^2}=\frac{-a^2+2at-2t+1}{(t-a)^2}$

$\left(\frac{-a^2+2at-2t+1}{(t-a)^2}\right)'=\frac{(-2a+2t)\cdot(t-a)^{2}-(-a^2+2at-2t+1)\cdot 2\cdot(-1)\cdot(t-a)}{(t-a)^{3}}=$

(!) $\frac{2(t-a)^2+2(-a^2+2at-2t+1)}{(t-a)^3}\ge0$

5h 7/М

$t-a\ge0\Rightarrow$ (!) $2(t-a)^2+2(-a^2+2at-2t+1)\ge0.$

(!) $t^2+\cancel{a^2}-2ta-\cancel{a^2}+2at-2t+1\ge0$

(!) $t^2-2t+1=(t-1)^2\ge0$ V.

$\Rightarrow$ Можем $\leftarrow a$ $b\rightarrow$ и сумма будет $\uparrow$

Пусть $a\ge b\ge c$.

$1^0.$ $a=b=c=0\Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\le\frac{3}{1}$ V.

$2^0.$ $a\ge0\Rightarrow a>1$, иначе $a\le1\Rightarrow b\le1, c\le1\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le a+b+c$, рав-во при $a=b=c=1$: $0+0+0\le\frac{3}{4}$ V.

$c<1$, иначе $a\ge b\ge c\ge1\Rightarrow a+b+c\le a^2+b^2+c^2$, рав-во при $a=b=c=1$. V.

Тогда сначала будем двигать b с чем-то, чтобы $b=1$, т.к. в ср-то так можно сделать

~~c 1 b a~~

$b=1$ (!) $\frac{(a-1)^2}{c+2}+\frac{(c-1)^2}{a+1} \le \frac{3}{a+c+2}$

~~Сдви~~ Раздвигать всё ещё можем и после это двигаем $a \leftarrow c$ и $a \to$, $c \to 0$.

теперь нынешнее a, это сумма $a+b+c-1$ из условия

(!) $a+b+c \le 3$.

От противного: $a+b+c>3$.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$3(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c)$

$\Rightarrow 3 \geq a+b+c$ (?!).

$\Rightarrow$ Нынешнее $a \le 3-1=2$.

$\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{1}{a+2} \le \frac{3}{a+2}$

$(a-1)^2 \le \frac{4}{a+2}$

$(a-1)^2(a+2) \le 4$

$1 \geq \ldots \quad 4$ (V).

$(0 \le a \le 2)$ $(a \le 2)$

I $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = \frac{a^2-2a+1}{b+c+1} = \frac{b+c-b^2-c^2+a-2a+1}{b+c+1} = 1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$

2 ост. ан-но:

(!) $3 \le \frac{3}{1+a+b+c}+\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+\frac{c^2+a^2+b}{a+c+1}+\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}$

$\frac{3}{1+a+b+c}+\frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}+\frac{c^2+a^2+b}{a+b+c+1}+\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1}=$

$=\frac{3+b^2+c^2+a+c^2+a^2+b+a^2+b^2+c}{1+a+b+c}=\frac{3+3(a+b+c)}{1+a+b+c}=3$

(V).

Задача № 4~~3~~ Лист 1 из 1 Номер участника: 70

0 Сб

Что это на самом деле:

на самом деле эти звенья – это векторы с суммой ~~&~~ $\vec{0}$. При этом все они на един. окружности. Т.е. можно сказать, что это набор комплексных чисел на единичной окр. с ~~&~~ суммой 0. Если 2 вектора $\perp$ =>

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = -\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}} = -\frac{z_2}{z_1}$$

$$z_1^2 = -z_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm i z_2$$

$$z_1 + z_2 \dots + z_{1000} = 0.$$

~~&~~ Нам ещё важно, что перпенд. векторы именно пересек. заметим, что их ставить мы можем в любом порядке. Поэтому если мы будем балансированно их ставить, мы сможем сделать так, чтобы они $\perp$ все пересекались, поэтому главная задача найти такие $z_1 \dots z_{1000}$

Почему ?!?!

??

Оценка на 498: Не существенно?

Ал

Пусть ≥ 501 => ~~на~~ рассм. вектор $\bar{a}$ => будет ≥ 501 паралл. векторов, ~~кот.~~ $\perp$ в a

Рассм. вектор $a \perp b$ => найдётся ≥ 501 вектор $\perp b$ => => $501 + 501 - 1 \geq 1000$ (?!).

Пусть ≤ 500 => $\vee$ 2 типа, которые $\perp$ вектор a: у него ≥ 500 $\perp$, при этом те, что соседн. не учавств. т.к.

b

a ≥ 500

b

=> ≥ 502 вектора b => ≥ 502 вект. a

На 499 ан-но => (?!) вектора b ≥ 501 (?!) вектора a ≥ 501

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 70

~~Расскрасим~~ Разделим квадрат 30×30 на квадратики 2×2. Всего кв. $\frac{30 \cdot 30}{4} = 225$.

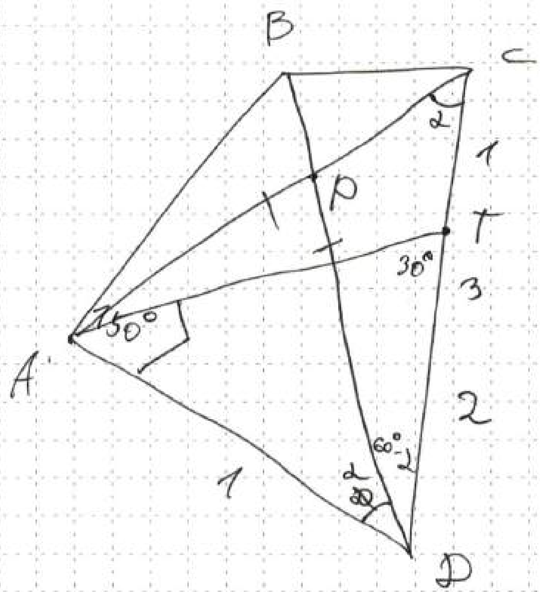
В каждом квадратике ≤ 1 короля

Всего 220 королей $\Rightarrow$ максимум 5 не занятых квадратиков. В квадрате 9×9 ≥ 16 полных квадрата 2×2 ~~…~~, не занятых максимум 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~оста~~ занятых $\geq 16 - 5 = 11$ $\Rightarrow$ ≥ 11 королей ☐.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 70 $+_{Ек}$?



P - перес. диагоналей

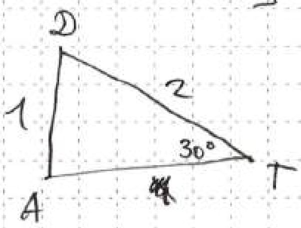
$CT = 1 \quad TD = 2$

$AC = BD \quad \angle ACD = \angle BDA$

$CT = AD \Rightarrow \triangle ACT = \triangle BDA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC = \angle BAD = 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATD = 30°$



$\frac{DA}{DT} = \frac{\sin 30°}{\sin\angle DAT} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\angle DAT} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle DAT = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAT = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADT = 60°. \quad \angle ADB = \alpha \Rightarrow \angle BDC = 60° - \alpha$

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC \cdot \cos(60° - \alpha)$

$BD = AC$

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot AD \cos 60° =$

$= 1 + 9 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 10 - 3 = 7.$

$AC = \sqrt{7}.$

$\frac{\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{28}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{28}} = \sqrt{\frac{25}{28}}.$

$\cos(60° - \alpha) = \cos 60° \cdot \cos\alpha + \sin 60° \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{28}} +$

$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{5+3}{2\sqrt{28}} = \frac{8}{2\sqrt{28}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot BD \cdot \cos(60° - \alpha) =$

$= 7 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = 7 + 9 - 12 = 4.$

$\Rightarrow BC = 2.$

Ответ: 2.

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 70 7ам

+.ТА

Ответ: не может.

От противного:

Пусть $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots (abc+1)p^2$

$(p \in \mathbb{P})$. Разберём $\not{3}$ 2 случая:

1°. НУО $(ab+a+1) \vdots p^2$, $(bc+b+1) \not\vdots p$ и $(ca+c+1) \not\vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow abc+1 \vdots bc+b+1 \Rightarrow abc-abc-ab-a+1 \vdots bc+b+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+a-1 \vdots bc+b+1.$

$ab+a-1 \geq bc+b+1.$ ~~$\geq a$~~ c.

~~$\Rightarrow (ab+a-1) \cdot c \vdots bc+b+1.$~~

~~$\Rightarrow abc+ac-c \vdots bc+b+1$~~

$abc+1 \vdots$ ~~$ab+a+1$~~ $bc+b+1$

$abc-\cancel{a}bc-b-1+\cancel{1} \vdots bc+b+1$

$b(ac-c-1) \vdots bc+b+1 \quad (b, bc+b+1)=1. \Rightarrow$

$\Rightarrow ac-c-1 \vdots bc+b+1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} ac-c-1=0 \Rightarrow c=1, a=2 \quad (*). \\ ac-c-1 \geq bc+b+1 \end{array}\right.$ ← не может быть, разберу позже $(*)$!

$ac-c-1 \geq bc+b+1.$

~~$2b$~~ ~~2~~ $+1$

$ac \geq bc+b+c+2 \Rightarrow a>b.$

$abc+1 \vdots ac+c+1$

Ан-но

~~$ab+a+1$~~ $bc+b-1 \vdots ac+c+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow bc+b-1 \geq ac+c+1$

$+ \; ac-c-1 \geq bc+b+1$

$\cancel{bc}+\cancel{ac}+\cancel{b}-c-2 \geq \cancel{ac}+c+1+\cancel{bc}+\cancel{b}+1$

$-c-2 \geq 1$ (?!).

2°. НУО ~~$ab+a+1 \vdots p$~~ $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p$, $ca+c+1 \vdots p$.

$bc+b+1-(ca+c+1)b = \cancel{bc}+\cancel{b}+1-abc-\cancel{bc}-\cancel{b} \Rightarrow$

$\vdots p \qquad \vdots p$

$\Rightarrow abc-1 \vdots p.$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 70

$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow (bc+b+1)a \vdots p$

$abc+ab+a \vdots p$.

$abc+ab+a+1-1 \vdots p$

$ab+a+1 \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow abc+1 \vdots p$

$abc-1 \vdots p$ $\Big| \Rightarrow abc+1-abc+1 \vdots p \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p=2$.

~~!(*) Разберёмся с чётностью a, b и c.~~
~~1°.~~

$p=2$. $abc+1 \vdots p=2 \Rightarrow abc+1 \vdots 2 \Rightarrow abc \not\vdots 2 \Rightarrow a, b, c \not\vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+b+1 \not\vdots 2$
$bc+b+1 \not\vdots 2$
$ca+c+1 \not\vdots 2$ (?!).

!(*) Разберёмся с чётностью a, b и c

1°. $a, b, c \not\vdots 2 \Rightarrow abc+1 \vdots 2$
$(ab+b+1) \not\vdots 2$
$(bc+b+1) \not\vdots 2$
$(ca+c+1) \not\vdots 2$ (?!)

НУО.

2°. $a, b \not\vdots 2, c \vdots 2 \Rightarrow abc+1 \not\vdots 2$
$ab+b+1 \vdots 2$
$bc+b+1 \vdots 2$ $\Rightarrow$
$ac+c+1 \not\vdots 2$

$\Rightarrow$ ~~$bc+b+1$~~ $p=2$ (т.к. частное будет $\not\vdots 2$) (?!)

Ну это значит?

3°. НУО $a \vdots 2$, $b, c \not\vdots 2 \Rightarrow abc+1$ ~~$\not\vdots 2$~~ $\vdots 2$
$ab+b+1 \vdots 2$
$bc+b+1 \not\vdots 2$ $\Rightarrow p=2$ (?!).
$ac+c+1 \vdots 2$

4°. $a, b, c \vdots 2$ ⓥ.

Т.е. случай, когда $c=1$, $a=2$ ⊗, т.к. $c \not\vdots 2$.

(НУО везде можно говорить, т.к. a, b и c можно сдвинуть по циклу)

Задача № 8 Лист 1 из 2 Номер участника: 70

−С6 0 КАБ

~~Пус~~ Ответ: нет.

Пусть $a_1 \le a_2 \le a_3 \dots \le a_{25} \le b_1 < b_2 \dots \le b_{25}$.

$b_1 + \dots + b_{25} = S_1$

$a_1 + \dots + a_{25} = S_2$

~~$S_1 - b_i = a \dots a$ и возможно b_j.~~

~~$S_1 - b_i = a \dots a + b_i$ только 1 разу~~

$S_1 - b_i = a + \dots + a$ только 1 раз возможно.

1^0. $\underbrace{a \dots + \dots + a}_{\le 24} = S_1 - b_i \ge 24 \cdot b_1$ (?!).

2^0. $a_1 + \dots + a_{25} = S_1 - b_i \Rightarrow b_i$ макс. 1.

фикс.

т.е. все кроме 1ой b_i представляются как.

$S_1 - 2b_i = a \dots + \dots + a \dots$

~~$b_i - b_j$ $S_1 - 2b_i$~~

$a_1 + \dots + a_{25} + b_1 \ge b_2 + \dots b_{25}$ (Иначе (?!)).

$c_1 \le \dots \le c_{50}$ — гири

$(c_1 = a_1, c_{50} = b_{25})$

$c_1 + \dots + c_{50} = S$.

Рассмотрим всевозможные группы из 24-х

Их $\frac{50!}{24! \cdot 26!}$ Каждую c_i возьмём $\frac{49!}{23! \cdot 26!}$.

Т.е. $\frac{49!}{23! \cdot 26!} \cdot S = k_1 c_1 + \dots + k_{50} c_{50}$

~~Если мы в семину ставим~~ всегда ≤ 24 с-шек

~~то (?!), т.к.~~

$c_1 + \dots + c_{24} = \underbrace{c_i + \dots + c_j}_{<24}$ < 2

+

$c_{50} + \dots + c_{27} = \underbrace{c_i + \dots + c_j}_{\ge 24}$. ~~$(S - c_{25} - c_{26}$~~ $= \underbrace{c + \dots + c}_{<24}$

→ сократятся справа почти все c_i, $1 \le i \le 24$

Задача № 8 Лист 2 из 2 Номер участника: 70

Слева почти все c_i $i \geq 25$ и все те, где i

~~Справа~~ ~~Сл~~ ~~Слева~~ Справа сократятся все c_i $1 \leq i \leq 24$

а ~~Справа~~ Слева все

Справа все c_i $1 \leq i \leq 24$ и $27 \leq i \leq 50$ сократятся

максимум останется

а c_{25} и c_{26}.

~~Справа~~ Слева будет ≥ 1 c_i $i \geq 27$

Причём $\# c_i$, где $i \geq 27$ в П.Ч. $\leq 2(a_{25}+a_{26})$

$\overset{11}{4}$ иначе ~~так то~~ [?!].

(Если там позразбирать дальше случаи то найдётся противоречие ~~во всех~~)

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!