Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-8 - 4В

аудитория – посадочное место

41306267

номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

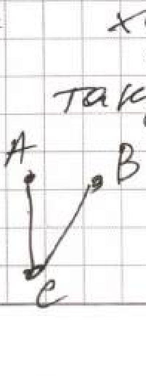
- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ пр	+ и.Б.	∓ ВБ	
7 АЮ	7 ОЛ	7 АУ	2 МК	23

1. Оценка: ну $2 \le k \le 6$ может принимать значения, всего значений 5, т.е. максимум пятерок 5, но если k примет значение 2, то $n = 2a_1 + 1$, где $a_1 \in N$, тогда n будет нечетным, ~~а~~ при этом k может принимать и значение 4, тогда $n = 4a_2 + 6$ где $a_2 \in N$, тогда $n \vdots 2$, и n — четное.
Т.е k не может при~~нимать~~ значение и 2 и 4. Тогда максимум пятерок 4.
Пример: $n = 45$
$n = \underset{k=2}{22+23} = \underset{k=3}{14+15+16} = \underset{k=5}{7+8+9+10+11} = \underset{k=6}{5+6+7+8+9+10}$.
Ответ: 4 пятерки.

2. Пусть у нас n учеников, и каждый ходит в k кружков. Так как какой-то ученик (по условию) посещает минимум 2 кружка, то $k \ge 2$. Построим двудольный граф, в первой доле будут ~~кру~~ 7 вершин, обозначающие кружки, а во второй доле n вершин, ученики. Будем проводить ребра между вершинами если ученик ходит в этот кружок. Рассмотрим такую конструкцию как "галочка":

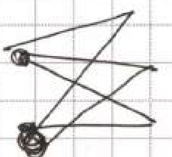


где C — будет центральной вершиной, а A, B — боковыми.

продолжение на след. стр.

Продолжение 2.

По условию у нас сказано, что в любые два кружка ходят ровно 3 общих учеников. ~~тогда~~ Расcмотрим отдельно именно эту конструкцию.



У нас получилось 3 галочки, с общими буквовыми вершинами.

Тогда всего таких галочек будет $C_7^2 \cdot 3 = 63$ галочки.

Мы знаем, что каждый ученик ходит хотя бы на 2 кружка, тогда каждый ученик будет ~~верши~~ центральной вершиной, какой-то галочки.

Если каждый ученик ходит на два кружка, то каждый ученик является центральной вершиной только одной галочки. Тогда если галочек 63, то $n = 63$, но $n < 60$ противоречие, значит ученик ходит не ровно в 2 кружка

Если $k = 3$, то из каждого ученика будет исходить 3 ребра, и ~~то~~ тогда каждый ученик будет центр. вершиной ~~как~~ в $C_3^2 = 3$ галочках и тогда

$n = \frac{63}{3} = 21$

Продолжение следует

Продолжение 2.

Если $k=4$, то ученик является центр. вершиной $C_4^2=6$ галочек, но $63 \not\vdots\ 6$, ~~т.е. не могут~~ противоречие, так 63 - кол-во галочек, значит $k \neq 4$.

Если $k \geq 5$, то ученик является центр. вершиной в $\geq C_5^2=10$ галочек, но тогда всего учеников $\leq \frac{63}{10}$, а так как их целое количество, то $n<6$, тогда будет противоречие с условием.

Получилось, что все нормально только при $k=3$ $n=21$

Ответ: 21 ученик.

~~Пример реализуется, так вот есть 3 ученика которые ходят в один кружок~~

Пример реализуется, так вот есть 3 ученика которые ходят в один кружок, тогда другие НХ кружки не пересекаются, и ~~вот этот~~ есть след 2 копии таких учеников которые ходят в такие же кружки

3. $a, b, c \geq 0$ $\quad a^2+b^2+c^2=a+b+c$

Предположим, что максимальное число (пусть a) $\geq 1,7$

Тогда ~~b^2-b~~

~~$b^2-b+c^2-c \geq -1,19$~~ $\quad b^2-b+c^2-c \geq -1,19$

~~Тогда хотя бы $b^2-b \geq -0,595$ или $c^2-c \geq -0,595$ Б.О.О. пусть $b^2-b \geq 0,595$~~

~~$b^2-b+0,595 \geq 0$~~

~~$b^2-b+1,19+c^2-c \geq 0$~~

~~Б.О.О. возьмем что b^2-b~~

Пусть $a = 1,7$

Тогда $b^2-b+c^2-c+1,19=0$

Б.О.О. $b^2-b+y=0$ $\quad a^2-a=2,89-1,7$

где $y \geq 0,595 = \frac{1,19}{2}$ $\quad y=c^2-c+1,19$

Тогда $D \leq 1-0,595\cdot 4<0$, тогда для b — нет решений.

А при увеличении a, разность между a^2-a и увеличивается, из-за чего y увеличивается, и $D<0$, тогда $a<1,7$, и все остальные $b, c < 1,7$

ок

Продолжение следует

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306267 — номер участника

лист 6 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Продолжение 3.

Сравним отдельно:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \overset{?}{\le} \frac{1}{1+a+b+c} \quad \Big| \cdot (1+a+b+c)(b+c+1) > 0$$

При $a=0$, достигается равенство

Теперь рассмотрим при $a \ne 0$

$= a^2+a^3+a^2b+a^2c-2a-2a^2-2ab-2ac+1+a+b+c \le b+c+1$

$(a-1)^2(1+a+b+c) \overset{?}{\le} b+c+1$

$a^3+a^2b+a^2c+a^2 \le 2a^2+2ab+2ac+\cancel{2a}$ $\Big| : a \ne 0$

$a^2+ab+ac+a \le 2a+2b+2c\cancel{+2} +1$

$0 \le (2-a)(a+b+c)+1-a$

$2a+2b+2c-a^2-ab-ac+1-a$

При $a \le 0$, неравенство доказано, ведь

$2-a \ge 0, \quad a+b+c \ge 0, \quad 1-a \ge 0$

При $a>0$, представим $a=1+k$

$k < \cancel{\le} 0{,}7$

$0 \le (1-k)(1+k+b+c)-k$

~~$0 \le 1+b+c - kb-kc-k-k^2$~~

~~$kb \le b \quad kc \le b \quad k+k^2 \le 0{,}2998$~~

$0 \le (1-k)((1+k)^2+b^2+c^2)-k$

$0 \le (1-k)(1+2k+k^2+b^2+c^2)-k$

$0 \le 1+2k+k^2+b^2+c^2-2k-2k^2-k^3-kb^2-kc^2-k$

$0 \le (1-k^2-k^3)+(b^2-kb^2)+(c^2-kc^2)$

$k^2+k^3 \le 0{,}833$ $\quad \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{1}{1+a+b+c}$

$1-k^2-k^3>0 \quad b^2-kb^2 \ge 0 \quad c^2-kc^2 \ge 0$

Значит ~~так~~ неравенство выполняется

Продолжение следует

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306267 — номер участника

лист 6 из 8

Продолжение 3.

Аналогично доказательству

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{1}{1+a+b+c},$$

будут выполнятся и

$$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{1}{1+a+b+c}$$

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{1}{1+a+b+c}$$

Так как само неравенство симметрическое,

тогда просуммируем эти 3 нер-ва

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{a+b+c+1}$$

получилось неравенство, которое нужно было доказать.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

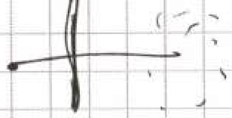
8 класс

41306267 номер участника

4. Будем пока пробовать решать задачу при $k>0$.

Рассмотрим случай если звенья ломаной имеют 2 направления, ~~вер~~ (вертикальные и горизонтальными)

Рассмотрим (одно из самых левых) самое левое вертикальное ~~ребро~~ звено, его пересекает хотя бы 1 ~~ребро~~ звено ($k>0$)



Но тогда ~~конец ломаной~~ ломаная будет незамкнута, ведь ~~нельзя будет~~ ~~про~~ там не будет дальше вертикального ребра.

Тогда мы выясним что для $k>0$, направлений больше 2. Но тогда их хотя бы 4, ведь для одного направления есть другое перпендикулярное, а для нового направления нет перпендикулярной, и k будет равен 0.

~~В~~ В таком случае k будет ~~≥~~ ≤ 250.

Потому что иначе будет ~~≥ 501 пересечение~~ ≥ 251 звено каждого направления, и их будет больше 1000

Если направлений у ребер будет больше 4, то ~~k≤~~ будет $k<250$ продолжение следует

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс; 41306267 — номер участника; лист 8 из 8

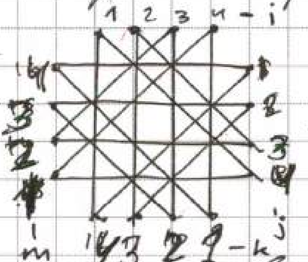
Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Продолжение 4.

У нас получилась оценка, что $k \le 250$

Построим пример

Рассмотрим пример на 16 звеньев:



пронумеруем вершины — это будет замкнутая ломаная У неё звенья разной длины.

ведь если представить её в виде графа, то ~~у всех~~ все степени и вершины будут равны

~~Теперь~~ Теперь опишем пример на 1000, он будет подобный

Звенья будут проведены в концах которые удовлетворяют этим условиям:

~~$\begin{cases} i+m=251 \\ i>125 \end{cases}$ $\begin{cases} j+k=251 \\ k>125 \end{cases}$ — эти направления перпендикулярны и пересекают друг друга~~

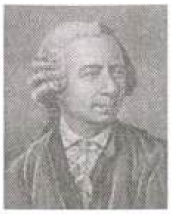
$m = 251 - j$, $k = 251 - i$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} i+m=251 \\ i>125 \end{cases} \\ \begin{cases} j+k=251 \\ k>125 \end{cases} \\ \begin{cases} k+m=251 \\ m>125 \end{cases} \\ \begin{cases} i+j=251 \\ j>125 \end{cases} \\ m=251-j \\ k=251-i \end{array}\right.$$

— эти направления перпендикулярны и ~~пересекают~~ в каждое звено другого направление пересекает другое

— аналогично.

Пример полностью аналогичен примеру на 16 звеньев



Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-8 - 4В
аудитория – посадочное место

41306267
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ АД	+ МС	∅ А.П.	− МК	
7 ВС	7 АЮ	∅ МК	0 КА	14

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

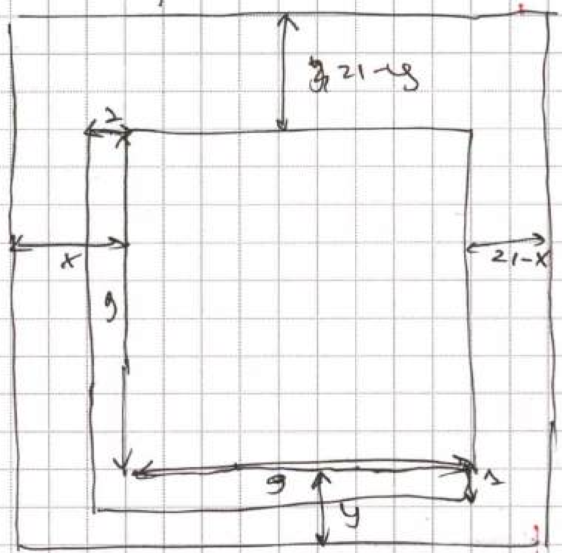
Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306267 — номер участника

лист 1 из 5

5. Выделим на шахматной доске любой квадрат 9×9.
До этого заметим что ~~королей~~ только 1 короля можно поставить в квадрат 2×2



Посчитаем сколько может быть королей вне квадрата 9×9.
Б.О.О. возьмем что x и y нечетные, мы можем так сделать так (21-x и x) и (21-y и y) – разной четности.

Хорошо чтобы лучше посчитать отделим окантовкой в 1 клетку со стороны x и y, чтобы квадрат стал как бы 10×10. На рисунке показано. В рамке

а если вышла за пределы 30×30?
x y – нечетные ⟹ 1 окант

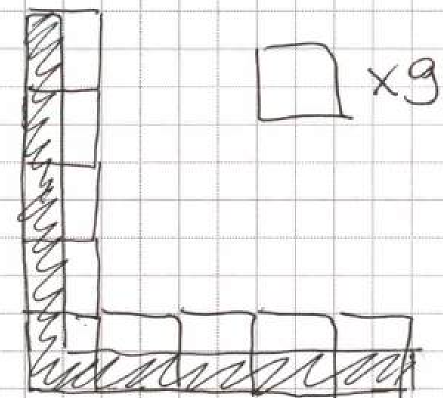
не считая квадрата и окантовки, может по-меститься $\frac{x-1}{2}\cdot\frac{30}{2}+\frac{21-x}{2}\cdot\frac{30}{2}+\frac{y-1}{2}\cdot\frac{10}{2}+\frac{21-y}{2}\cdot\frac{10}{2}$ ~~3~~ так как ранее упомянуто что в квадрат 2×2 поместится 1 король. Получилось что в рамке ≤200 королей.

Теперь рассмотрим окантовку.
~~Если ставить королей по вертикали по горизонтальной клетке, то поместится всего 5.~~

Продолжение следует.

Продолжение 5.

Эту окантовку перекрывает 9 квадратов 2×2, значит королей на окантовке ≤ 9.



Получается что королей вне квадрата ≤ 209

А так как всего 220 королей, то в квадрате ≥ 11 королей.

Так как мы не привязывались к определенному квадрату, а делали в общем случае, то во всех квадратах 9×9 ≥ 11 королей. ч.т.д.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

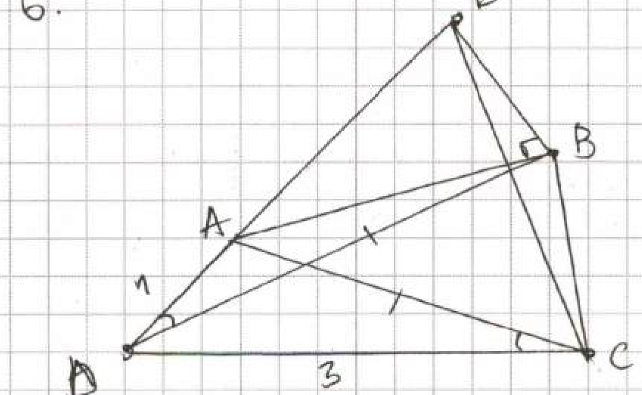
8 — класс

41306267 — номер участника

лист 3 из 5

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

6.



~~Продолжим AD, за точку A, на~~

На продолжении AD, за точку A, поставим точку E, так чтобы $DE = DC$, т.е. $AE = 2$

Тогда $\triangle ACD = \triangle BDE$

$(\angle EDB = \angle ACD;\ DB = AC;\ DE = DC)$

$\angle EAB = 180^\circ - \angle DAB = 30^\circ$

$EB = AD = 1$. $\angle ADC = \angle AEB$

Заметим что в $\triangle AEB$, сторона напротив угла 30°, равна 1, а прилегающая 2, это значит что $\triangle AEB$ - прямоугольный, тогда $\angle AEB = 60^\circ$

$\angle ADC = \angle AEB = 60^\circ$

Проведем EC, т.к. $ED = DC$ и $\angle EDC = 60^\circ$, то $\triangle DEC$ - равносторонний.

т.к. $\angle DEC = \angle DEB$, то B на прямой EC.

$EC = 3$, $DC = 3$, $EB = 1$, тогда $BC = 2$

Ответ: $BC = 2$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306267 — номер участника

лист 4 из 5

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Предположим мы можем так сделать

8. Возьмем наибольшие 24 гирьки.

Первый случай, когда чтобы уравновесить мы взяли 26 гирь. Тогда уберем отсюда гири a_i и a_j, тогда ~~в~~ чтобы уравновесить снова, мы из ~~тяже~~ тяжелых гирь должны добрать гире суммы с весом $a_i + a_j$,

Заметим что все тяжелые гири тяжелее a_i и a_j, ~~то~~ тогда мы не можем из тяжелых выбрать ≥ 2 ~~ф~~ гирь с суммарным весом $a_i + a_j$, получается что среди тяжелых ~~есть~~ есть ~~гир~~ гиря с весом $a_i + a_j$.

a_i и a_j могут уменьшать в ур-ии взятых 24

Теперь давайте упорядочим гири:

$a_1 \leq a_2 < a_3 < a_4 \quad \ldots \quad < a_{50}$

a_i и a_j могут уменьшать вуравн

Тогда $a_1 + a_2 \neq a_1 + a_3 \ldots \neq a_1 + a_{26}$

~~В~~ но так i и j у нас могут быть может от 1 до 26, хотя бы 24 то среди 24 тяжелых гирь есть 25 различных весов, противоречие, значит мы не брали 26 гирь в начале.

~~Теперь рассматриваем случай, когда мы взяли 25 гирь, значит какую-то~~

Продолжение следует

продолжение 8
Но мы еще не рассмотрели случай что у нас есть какие-то гири с суммар. весом ~~2y+2x~~, $2a_i+2a_j$ которые мы можем убрать и поставить a_i и a_j
Но ~~у н~~ Но у нас не может Или с суммарным весом $2a_i+a_j$, и мы добавляем a_i, и наоборот