Задача №  1   Лист  1  из  1    Номер участника:  73   A + G

Оценка:
Заметим, что $k \in (1; 7)$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ для $k$ есть 5 вариантов (от 2 до 6)

1). $k=6 \Leftrightarrow n = a_1 + (a_1+1) + (a_1+2) + \ldots + (a_1+5) = 6a_1 + 15$

2). $k=5 \Leftrightarrow n = a_2 + (a_2+1) + \ldots + (a_2+4) = 5a_2 + 10$

3). $k=4 \Leftrightarrow n = a_3 + (a_3+1) + \ldots + (a_3+3) = 4a_3 + 6$

4). $k=3 \Leftrightarrow n = a_4 + (a_4+1) + (a_4+2) = 3a_4 + 3$

5). $k=2 \Leftrightarrow n = a_5 + (a_5+1) = 2a_5 + 1$

Но рав-ва 5 и 3 не могут быть выполнены одновременно, т.к. из рав-ва 5 следует, что $n \not\vdots 2$, а из рав-ва 3 следует, что $n \vdots 2$ ?! $\Rightarrow$ одно из них не выполнено $\Rightarrow$ max 4 могут быть выполнены одновременно ✓

Пример:

$n = 45$

$45 = 6 \cdot 5 + 15 = 5 + 6 + \ldots + 10$

$45 = 5 \cdot 7 + 10 = 7 + 8 + \ldots + 11$

$45 = 3 \cdot 14 + 3 = 14 + 15 + 16$

$45 = 2 \cdot 22 + 1 = 22 + 23$

Ответ: 4

7 ТМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 2 Номер участника: 73

Оценка:

] в классе $n$ учеников, каждый из которых посещает $k$ кружков.

Заведём граф. Рёбра - ученик посещает эти 2 кружка, вершины - кружки. Разрешены кратные рёбра.

7 нб + ВВ

Ученик проводит ребро, если он посещает эти 2 кружка $\Rightarrow$ он проводит $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ рёбер.

Учеников $n \Rightarrow$ проведено $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ рёбер.

Между каждыми 2-умя вершинами по 3 ребра $\Rightarrow$ всего $C_7^2 \cdot 3 = 3^2 \cdot 7$ рёбер

$\Rightarrow n \cdot \frac{k(k-1)}{2} = 3^2 \cdot 7$

$$n \cdot k \cdot (k-1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$k$ и $k-1$ разной чётности $\Rightarrow 2$ входит в одно из них $\Rightarrow n \not\vdots 2$

1). $n=3$ - не подходит, т.к. $3<6$

2). $n=7 \Rightarrow k(k-1) = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow (k;k-1) = \left[\begin{array}{l} (9;2) \\ \cancel{(2;9)} \\ (6;3) \\ (18;1) \end{array}\right.$ ?! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не подходит

3). $n=9 \Rightarrow k(k-1) = 2 \cdot 7$ - не бывает ?! (пара $k, k-1$ либо пара 2,7, либо пара (14,1)

4). $n=21 \Rightarrow k(k-1) = 2 \cdot 3$ - бывает ($k=3$)

5). $n=63$ ~~$\Rightarrow k(k-1)$~~ - не подходит, т.к. $63>60$ ?!

6). $n=1$ - не подходит, т.к. $1<6$ ?!

$\Rightarrow$ единственный возможный случай - 21

~~Пример.~~

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Пример:

Пронумеруем учеников от 1 до 21, кружки от 1 до 7

3 ученика с номерами от 1 до 7 посещают 3 кружка подряд (по mod 7) начиная со своего номера.

С номерами 8 – 14 аналогично, только с шагом 2 между соседними

С номерами 15 – 21 – с шагом 3

Заметим, что пара $(x;y)$ $x<y$ с разностью $>3$ переходит в пару $(x_1;y_1)$ $x_1<y_1$ с разностью $\leq 3$ перенумерацией кружков, а в построении всё симметрично для любой перенумерации $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти случаи разбирать не надо

(дальше все суммы и разности по mod 7)

$y-x=1 \Rightarrow$ эта пара у учеников ~~с номерами~~ в кружках $(y-1;y;y+1)$; $(y-2;y-1;y)$; $(y;y+3;y-1)$

$y-x=2 \Rightarrow (y;y-1;y-2)$; $(y-2;y;y+2)$; $(y-4;y-2;y)$

$y-x=3 \Rightarrow (y-3;y;y+3)$; $(y-6;y-3;y)$; $(y;y+2;y-3)$

$\Rightarrow$ у всех пар есть 3 посещения, больше 3 быть не может, т.к. суммарно всего 63 посещения,

Ответ: 21

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 73

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$$

+ мм

~~Заменим в правой части $a+b+c$ на $a^2+b^2+c^2$ - равно~~

Заменим в правой части $a+b+c$ на $a^2+b^2+c^2$ - равносильное преобразование.

В левой (для всех аналогично) заменим $b+c+1$ на $a^2+b^2+c^2-a+1$ - равнос. преобразование

$$\frac{(a-1)^2}{a^2+b^2+c^2-a+1}+\frac{(b-1)^2}{a^2+c^2+b^2-b+1}+\frac{(c-1)^2}{a^2+b^2+c^2-c+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$$

(Докажем* для 1 дроби из левых, для остальных аналогично)

$*\ \frac{(a-1)^2}{a^2+b^2+c^2-a+1}\le\frac{a^2-a+1}{a^2+b^2+c^2+1}$, т.к. $a^2-2a+1\le a^2+b^2+c^2-a+1$, т.к. $-a\le b^2+c^2$ т.к. $a\ge 0$ и добавили к числ. и знам. $a\ge 0$, то т.к. если $p\le q$, то $\frac{p}{q}\le\frac{p+k}{q+k}$ $(k\ge 0)$ $\left(\frac{p}{q}\le\frac{p+k}{q+k}\iff pq+pk\le pq+kq\iff p\le q\text{-и.}\right.$ (если $k=0$ то ничего не изменилось) при $p\ge 0$, $q\ge 0$, $k\ge 0$, $p\le q$ $\left.\right)\Rightarrow$ при таком преобразовании нер-во усилилось $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ хотим доказать, что

$$\frac{a^2-a+1}{a^2+b^2+c^2+1}+\frac{b^2-b+1}{a^2+b^2+c^2+1}+\frac{c^2-c+1}{a^2+b^2+c^2+1}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2+1}$$ - и., т.к.

сложив дроби в левой части получаем

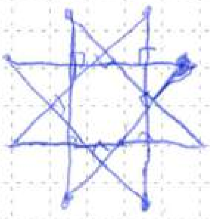
$$\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a^2+b^2+c^2+1}=\frac{3}{a^2+b^2+c^2+1}.$$

* знаменатель не стал 0, т.к. он был $>0$ и мы его не уменьшили.

**Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!**

Задача № 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 73

При восьми звенной ломанной максимальное k – 2, т.к. есть $\geq 4$ направления (2 пары перп-ых), каждого из них $\geq k$, т.к. если какого-то направление $< k$, то оно не может пересекать перпендикулярное ему $\geq k$ раз?!
Возможно, т.к. пример –



AG НФ

почему не 2? почему не 3?
почему ⊥ есть?

2б

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 73 7Ab

Разобьём доску на квадраты $2\times2$. В каждом из них $\le 1$ король, т.к. если есть 2 короля в квадрате они бьют друг друга. Всего квадратов $900:4=225 \Rightarrow$ max 5 из них без королей.

В любом квадрате $9\times9$ есть квадрат $8\times8$, в котором стороны совпадают с линиями разбиения на квадратики, т.к. 9 - неч. $\Rightarrow$ ровно одна из гор. и 1 из верт. сторон не совпадает с линиями разбиения $\Rightarrow$ отрезав уголок с ними получим нужный квадрат $8\times8$*. В таком квадрате $8\times8$ есть 16 квадратов разбиения, из которых max 5 - пустые $\Rightarrow$ min 11 ~~полны~~ заняты.

* "Уголок с ними" - полоски $1\times9$ вдоль них, они соседние $\Rightarrow$ это уголок $1\times9$ скраю ~~ому~~ квадрата $9\times9$.

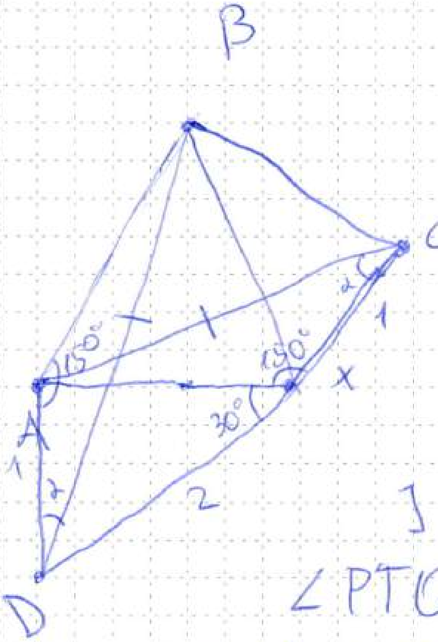
+ [illegible]

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 73

1 БС 7 КА

$\exists\ \angle ACD = \angle ADB = \alpha$

$X \in [DC]$, $CX = 1$




$\Rightarrow$ $^1$ $\triangle XCA = \triangle ADB$, т.к. $\angle XCA = \angle ADB = \alpha$, $AD = XC = 1$, $AC = BD$

$\Rightarrow \angle CXA = \angle DAB = 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AXD = 30°$

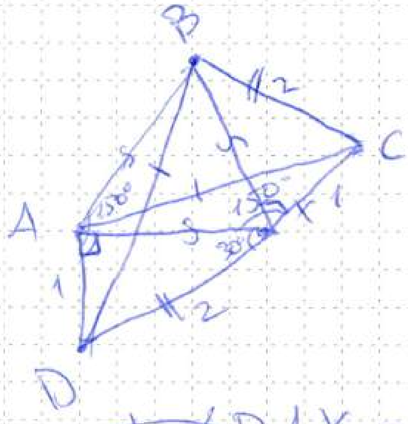
$\Rightarrow \angle DAX = 90°$* ~~или 30°~~, т.к.

~~$\exists\ \triangle PQT$ таков, что $PQ = 2$, $PT = 1$, $\angle PTQ = 90° \Rightarrow \triangle DAX$ равен или почти равен такому $\triangle PTQ$ (2 стороны и угол напротив одной из них – 30°).~~

~~1.~~ $\angle DAX = 90° \Rightarrow \angle XAB = 60°$. Из рав-ва $^1$ $AX = AB \Rightarrow \triangle BAX$ – равносторонний $\Rightarrow \angle AXB = 60°$

$\Rightarrow \angle CXB = 90° = \angle XAD$, $XB = AX$, $CX = DA = 1 \Rightarrow \triangle DAX = \triangle CXB \Rightarrow$

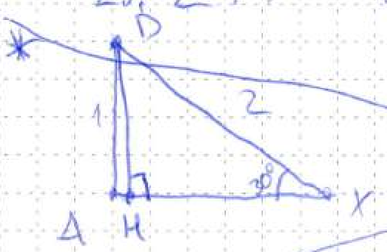
$\Rightarrow CB = DX = 2$




* по теореме синусов для $\triangle ADX$ ($\exists\ \angle DAX = \beta$): $\frac{AD}{\sin(30°)} = \frac{DX}{\sin(\beta)}$

$\Rightarrow \frac{1}{(\frac{1}{2})} = \frac{2}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = 1 \Rightarrow \beta = 90°$.

~~2). $\angle DAX = 30°$~~




~~От противного: $\exists\ \angle DAX \neq 90° \Rightarrow$ Опустим перп-р $DH$ из $D$ на $AX$ $\Rightarrow DH = AD = 1$ ($DHX$ – треуг. 30°-60°-90°) $\Rightarrow \triangle ADH$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle DAH = \angle DHA = 90°$ ?! $\Rightarrow A = H$.~~

**Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!**

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 73

+ТМ 7ВЛ

Ответ: нет

От противного:

$\exists\ (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=p^2(abc+1)$

$p$ — простое

1). $\exists$ какая-то скобка $\vdots\ p^2$ (НУО $ca+c+1$, скобки сдвигаются друг в друга по циклу $\Rightarrow$ общность не уменьшилась)

$\Rightarrow$ ~~остал~~ $\frac{ca+c+1}{p^2}=\frac{abc+1}{(ab+a+1)(bc+b+1)}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow abc+1\ \vdots\ (ab+a+1)(bc+b+1)$

$abc+1\neq 0\Rightarrow abc+1\geq(ab+a+1)(bc+b+1)=$

$=ab^2c+abc+bc+ab^2+2ab+b+a+1=(abc+1)+$

$+\underbrace{(ab^2c+bc+ab^2+2ab+b+a)}_{>0,\ \text{т.к. все слаг.}>0}>abc+1$ ?!

$\Rightarrow$ есть 2 скобки $\vdots\ p$. ✓

2). 2 скобки $\vdots\ p$ (НУО $bc+b+1$; $ca+c+1$, общность не уменьшилась, т.к. любой набор переходит в этот сдвигом букв по циклу)

$$\begin{cases} bc+b+1\underset{p}{\equiv}0\\ ca+c+1\underset{p}{\equiv}0\end{cases}$$

$\Rightarrow c+1\underset{p}{\equiv}-ac;\ b(c+1)\underset{p}{\equiv}-1\Rightarrow -abc\underset{p}{\equiv}-1\Rightarrow$

$\Rightarrow abc\underset{p}{\equiv}1$ ✓

$ab+a+1\underset{p}{\equiv}\frac{abc}{c}+a+1\underset{p}{\equiv}\frac{1}{c}+a+1\underset{p}{\equiv}\frac{ac+c+1}{c}\underset{p}{\equiv}0$ ✓

делить можно, т.к. $c\not\vdots\ p$, т.к. иначе $1\underset{p}{\equiv}0$ ?!

$\frac{abc+1}{ab+a+1}=\frac{(bc+b+1)(ca+c+1)}{p^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow abc+1\ \vdots\ ab+a+1\Rightarrow abc+1\ \vdots\ p\Rightarrow$

$\Rightarrow abc\underset{p}{\equiv}-1\Rightarrow -1\underset{p}{\equiv}1\Rightarrow p=2$ ✓

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 73

$p=2 \Rightarrow$ какая-то из скобок $\vdots\, 2 \Rightarrow$ среди $a, b, c$ есть и 0 и 1 по mod 2*

$\Rightarrow$ (с точностью до сдвига) Остатки – $1;0;0$ или $1;1;0$

1). $1;1;0 \Rightarrow abc+1 \overset{\equiv 0+1}{} \not\vdots\, 2$, $ab+a+1 \overset{\equiv 1+1+1}{} \not\vdots\, 2$; $bc+b+1 \overset{\equiv 0+1+1}{} \vdots\, 2$,

$ca+c+1 \equiv_2 0+0+1 \not\vdots\, 2$

$\Rightarrow bc+b+1 \,\vdots\, p^2$ ?! (первый случай для $p \not\vdots\, 2$) почему ?!

2). $1;0;0 \Rightarrow abc+1 \equiv_2 0+1 \not\vdots\, 2$ ; $ab+a+1 \equiv_2 0+1+1 \,\vdots\, 2$; $bc+b+1 \equiv_2 0+0+1 \not\vdots\, 2$;

$ac+c+1 \equiv_2 0+0+1 \not\vdots\, 2 \Rightarrow ab+a+1 \,\vdots\, p^2$ (первый случай для $p \not\vdots\, 2$)

* иначе $\exists$ НУО $ab+a+1 \,\vdots\, 2$

1). $a \equiv_2 b \equiv_2 c \equiv_2 1 \Rightarrow ab+a+1 \equiv_2 1+1+1 \not\vdots\, 2$ ?!

2). $a \equiv_2 b \equiv_2 c \equiv_2 0 \Rightarrow ab+a+1 \equiv_2 0+0+1 \not\vdots\, 2$ ?!

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!