Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 74 $+$ 7

Ответ: 4

Всего чисел (~~натуральных~~ целых ≥ 0), больших 1 и меньших 7, 5шт.: это 2, 3, 4, 5, 6.

2-хорошее число - сумма 2 последовательных натуральных чисел, нечётного и чётного $\Rightarrow$ оно $\not\vdots 2$ (нечётно)

4-хорошее число - сумма 4 последовательных натуральных чисел. Среди них всегда 2 чётных и 2 нечётных $\Rightarrow$ оно $\vdots 2$ (чётно)

Значит, одновременно 2-хорошее и 4-хорошее число быть не может $\Rightarrow$ не более $5-1=4$ пятёрок.

Пример на 4 пятерки:

$n=45$

$45=22+23$ 2-хорошее

$45=14+15+16$ 3-хорошее

$45=7+8+9+10+11$ 5-хорошее

$45=5+6+7+8+9+10$ 6-хорошее

Задача № 2 Лист 1 из 3 Номер участника: 74 $\frac{+}{БС}$

Каждый ученик посещает одинаковое количество кружков. Обозначим его за k_0. 7 кл б

(1°) $k_0 \le 1$ тогда любая пара кружков имеет 0 учеников, посещающих оба, т.к. каждый ученик посещает менее 2 ~~из~~ кружков $\Rightarrow$ Такого класса не существует.

(2°) $k_0=2$ ~~тогда~~ ~~каждого~~ любого ученика сопоставим паре кружков, в которую он ходит. Пар $\frac{7\cdot6}{2}$, в каждой сопоставлено ~~каждую~~ ~~ходит~~ 3 ученика $\Rightarrow$ Учеников $\frac{7\cdot6}{2}\cdot3 = 7\cdot9 = 63 > 60$

Такого класса не существует

(3°) $k_0=3$ Любого ученика сопоставляем 3 парам кружков, (среди 3 кружков, в которые он ходит, 3 пары). Пар $\frac{7\cdot6}{2}$, в ~~на~~ каждой сопоставлено 3 ученика $\Rightarrow$ сопоставлений $\frac{7\cdot6}{2}\cdot3=63$.

Любой ученик сопоставлен 3 раза $\Rightarrow$ учеников $\frac{63}{3}=21$

Приведём пример такого класса. Пронумеруем кружки от 0 до 6. Учеников разобьем на 3 семёрки и отправим их в кружки так:

I семёрка: каждый ходит в кружки i, $i+1$, $i+2$ ~~mod~~ по модулю 7 при i от 0 до 6 включительно. (у всех разные i)

II семёрка: каждый ходит в кружки i, $i+2$, $i+4$ по модулю 7 при i от 0 до 6 включительно (у всех разные i)

III семёрка: каждый ходит в кружки i, $i+1$, $i+4$ по модулю 7 при i от 0 до 6 включительно (у всех ~~в~~ разные i)

~~и~~ У всех разные i - имеется в виду конкретная семёрка. У людей из разных семёрок i могут совпадать.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 2 из 3 Номер участника: 74

Докажем, что у каждой пары кружков теперь 3 общих посетителя.

3.1°. пара вида k и $k+1$ ~~mod 7~~ по модулю 7

Ясно, что в оба её кружка ходят именно такие дети:

$k-1, k, k+1$ (I семёрка)

$k, k+1, k+2$ (I семёрка)

$k, k+1, k+4$ (III семёрка) (индексы кружков по модулю 7)

и никакие больше ~~[illegible]~~

(видно, что между другими индексами в семёрках нет расстояния 1, как у k и $k+1$)

тогда для неё верно.

3.2°. пара вида k и $k+2$ по модулю 7

В неё ходят:

$k, k+1, k+2$ (I семёрка)

$k, k+2, k+4$ (II семёрка) (индексы кружков по модулю 7)

$k-2, k, k+2$ (II семёрка)

и только они (видно из ~~[illegible]~~ разностей между остальными индексами аналогично)

для неё тоже верно.

3.3°. пара вида k и $k+3$ по модулю 7

В неё ходят:

~~[illegible]~~

$k+3, (k+3)+2, \underbrace{(k+3)+4}_{\overset{7}{\equiv} k}$ (II семёрка)

$k-1, k, k+3$ (III семёрка) (индексы кружков по модулю 7)

$k+3, (k+3)+1, \underbrace{(k+3)+4}_{\equiv k}$ (III семёрка)

И никакие другие => тоже верно.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Ясно, что все пары кружков представляются в виде $(k, k+1)_1$ или $(k, k+2)$ или $(k, k+3)$ (иначе кружков ≥ 8). Тогда для любой пары верно => 21 ученик может быть

4°. $k_0=4$ Любого ученика сопоставляем $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ парам кружков, для которых он общий ученик. Пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2}=21$, каждой сопоставлено 3 ученика => сопоставлений $63 \nmid 6$, а должно делиться, т.к. кол-во сопоставлений = кол-во учеников $\cdot$ сколько сопоставлений на 1 ученика. Такого класса не существует

5°. $k_0=5$ Любого ученика сопоставим $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ парам кружков. Сопоставлений аналогично $63 \nmid 10$ => такого тоже не существует.

6°. $k_0=6$ Любого ученика сопоставим $\frac{5\cdot 6}{2}=15$ парам ~~кружков~~ кружков, в которые он ходит. Сопоставлений $63 \nmid 15$ => не существует такого класса.

7°. $k_0 \geq 7$ Любой ученик ходит в ≤ 7 кружков => $k_0=7$. Тогда любой ученик общий у любой пары кружков => учеников 3, а их ≥ 6 по условию. Невозможен такой класс.

Ответ: 21 ученик.

Замечание. 1° - первый случай, 2° - второй случай и т.д.; 3.1°, 3.2° ... - первый подслучай случая 3, второй подслучай случая 3 и т.д. (такое обозначение)

Задача № 3 Лист 1 из 2 Номер участника: 74

+ТА 7пп

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$a^2-a=b+c-b^2-c^2$

$a^2-2a+1=b+c-b^2-c^2-a+1$

$(a-1)^2$

заменим $(a-1)^2$ на такое выражение, а $(b-1)^2$ и $(c-1)^2$ на аналогичные ему.

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}=\frac{b+c-b^2-c^2-a+1}{b+c+1}=1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$$

$$1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+1-\frac{b+c^2+a^2}{a+c+1}+1-\frac{b^2+a^2+c}{a+b+1}\overset{?}{\leq}\frac{3+3(a+b+c)-3(a+b+c)}{1+a+b+c}$$

$$3-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}-\frac{b+c^2+a^2}{a+c+1}-\frac{b^2+a^2+c}{a+b+1}\overset{?}{\leq}3-\frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c}$$

Если ~~мы~~ убрать из каждой части 3, то нер-во, которое мы хотим доказать, не изменится. Далее домножим на -1. Теперь хотим доказать противоположный знак:

$$\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+\frac{b+c^2+a^2}{a+c+1}+\frac{b^2+a^2+c}{a+b+1}\overset{?}{\geq}\frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c}$$

$b^2+c^2+a\geq 0,\ b+c+1>0 \Rightarrow \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}\geq\frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}$

(при увеличении знаменателя дробь с неотрицательным числителем и положительным знаменателем уменьшается или сохраняется, т.е не растёт)*

аналогично для оставшихся двух дробей.

~~$\frac{a}{b}\overset{?}{\geq}\frac{a}{b+c}$ $a,c\geq 0$, $b>0$~~

~~$\Updownarrow$~~

~~$a(b+c)\overset{?}{\geq}ab$~~

~~$\Updownarrow$~~

~~$ac\geq 0$ верно~~

* $x,y\geq 0$ $z>0$ $\frac{x}{z}\overset{?}{\geq}\frac{x}{z+y}$

$\Updownarrow$

$x(z+y)\overset{?}{\geq}xz$

$\Updownarrow$

$xy\overset{?}{\geq}0$ это верно.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 2 из 2 Номер участника: 74

$$\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+\frac{b+c^2+a^2}{a+c+1}+\frac{b^2+a^2+c}{b+a+1} \geqslant \frac{b^2+c^2+a}{1+b+c+a}+\frac{b+c^2+a^2}{a+b+c+1}+\frac{b^2+a^2+c}{c+b+a+1}=$$

$$=\frac{a+b+c+2(a^2+b^2+c^2)}{1+a+b+c} \xlongequal{\text{т.к. } a^2+b^2+c^2=a+b+c} \frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c} \text{ ч.т.д.}$$

Все последовательные переходы между неравенствами со знаком "?" равносильны => исходное неравенство верно, ч.т.д.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 4 Номер участника: 7AG74 tam

Оценка:

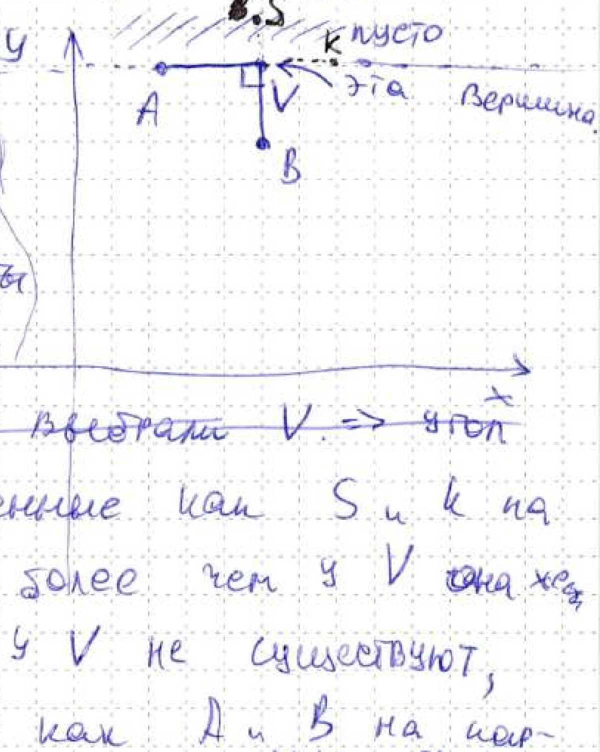
[illegible] Введём на плоскости точку T.

Назовём направлением такую прямую через T, которая параллельна или совпадает с хотя бы одной прямой, содержащей звено ломаной.

Если звенья пересекаются под прямым углом, то направления, соответствующие им, перпендикулярны. => При $k \geq 1$ направления бьются на пары перпендикулярных. => их чётное число.
($k<1$ не рассматриваем, т.к. есть пример на $k \geq 1$)

1°. Направлений 2. Тогда между соседними звеньями угол всегда 90° или 180°.

Введём прямоугольные координаты на плоскости так, чтобы оси x и y были параллельны направлениям. Возьмём вершину ломаной с максимальной координатой y а среди таких - с максимальной координатой x, назовём её V. ~~Если угол между ребрами с концом в ней 180°, то есть точка, у которой одна из координат хотя бы та же координата y выбранной V, а другая больше => неправильно выбрали V. => угол равно 90.~~ Поскольку точки (обозначенные как S и k на картинке) с одной из координат более чем у V (она же) и с другой хотя бы та же у V не существуют, то соседи V выглядят именно как A и B на картинке. Но для того, чтобы k было более ноль, [VA] должно быть пересечено, а оно может быть пересечено только ребром с точкой с



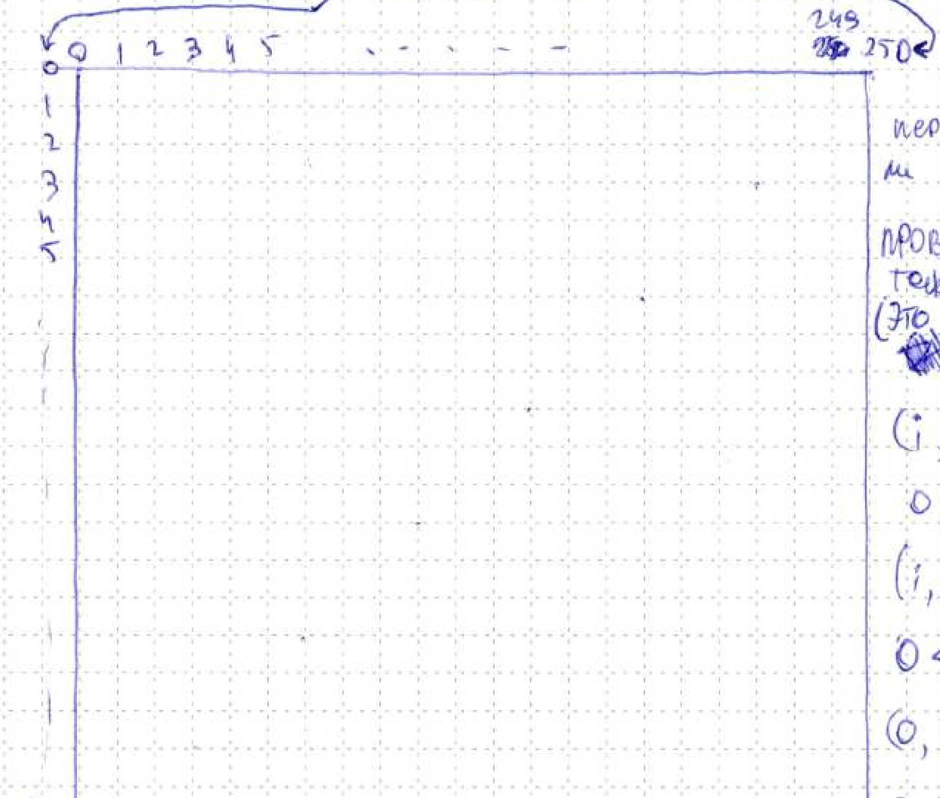
Задача № 4 Лист 2 из 4 Номер участника: 74

большей координатой по y, чем у A и V, а такого не существует $\Rightarrow k=0$ (?!)

2°. Направлений $\geq 4 \Rightarrow$ есть направление с не более чем 250 рёбрами, соответствующими ему $\Rightarrow$ у перпендикулярного ему направления не более 250 пересечений под прямым углом $\Rightarrow k \leq 250$

Пример на $k=250$

Рассмотрим клетчатый квадрат 250×250. ~~[illegible]~~ пронумеруем ~~[illegible]~~ линии, разделяющие его на клетки: далее эти линии - вертикали и горизонтали



Точка $(i;j)$ - точка пересечения i-ой вертикали и j-ой горизонтали.

Проведём отрезки между такими точками: (это будут звенья ломаной.)

$(i,0)$ и $(i+1, 250)$ при $0 \leq i < 250$ (тип I)

$(i,0)$ и $(i-1, 250)$ при $0 < i \leq 250$ (тип II)

$(0,i)$ и $(250, i+1)$ при $0 \leq i < 250$ (тип III)

$(0,i)$ и $(250, i-1)$ при $0 < i \leq 250$ (тип IV)

Ясно, что все звенья одного типа параллельны*.

Докажем, что звенья типа I и типа IV пересекаются под прямым углом. (каждого типа 250 $\Rightarrow$ каждое ребро типа I и типа IV будет пересекать $250=k$ рёбер)

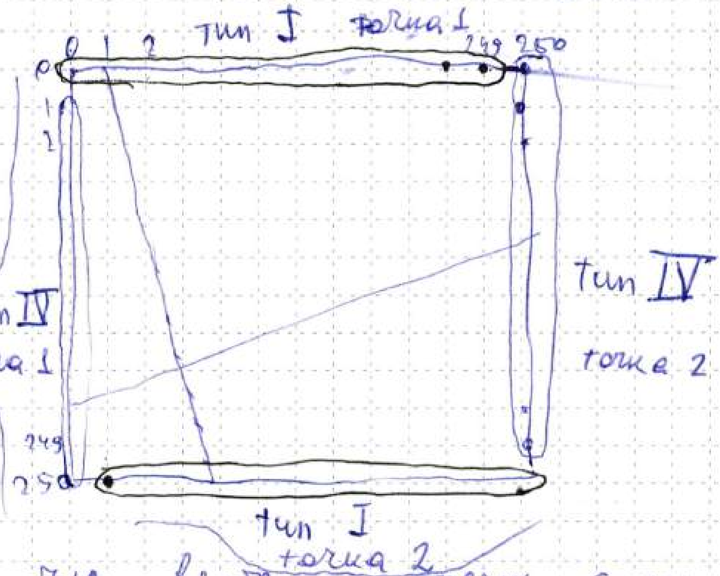
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 3 из 4 Номер участника: 74

1. Эти звенья пересекаются по внутренней точке:

На картинке показано, из каких множеств точек берутся концы отрезков типа I и типа IV.

~~Как бы ни был проведён отрезок типа I множества из которых выбираются концы отрезка типа IV все равно будут в разных множествах~~

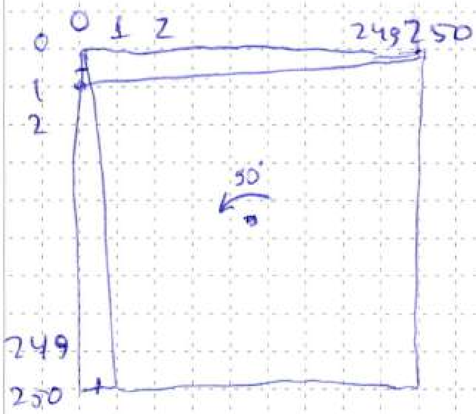


Видно, что как бы ни был выбран отрезок с концами из множества "тип I точка 1" и множества "тип 1 точка 2" (концы из разных), он все равно пересечёт любой типа IV.

2. Под прямым углом.

Поскольку все звенья одного типа параллельны, достаточно доказать про ~~[illegible]~~ любой отрезок типа I с любым отрезком типа IV.

Возьмём отрезок $(0,0)-(1,250)$ типа I и $(0,1)-(250,0)$ типа IV



при повороте против часовой стрелки в центре квадрата на 90° точка $(250,0)$ перейдёт в точку $(0,0)$, а точка $(0,1)$ перейдёт в точку $(1,250)$ ~~[illegible]~~

тогда угол между этими отрезками и правда 90°.

Аналогично тип II и тип III: любой отрезок типа II пересекает любой отрезок типа III под прямым углом.

Все отрезки равны, т.к. каждый по т. Пифагора равен $\sqrt{1^2+250^2}$.

Осталось доказать, что выделенные отрезки - замкнутая ломаная, в которой 1000 звеньев.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

~~Каждого~~ Для каждого типа 250 вариантов i =>
=> всего 250 · 4 = 1000 рёбер. Обозначим вершины квадрата как A, B, C, D.

Рёбра типа I с чётным i и рёбра типа II с чётным i; образуют ломаную от A до B (см. слева)

рёбра типа III и типа IV с нечётными i образуют ломаную от B до C

Рёбра типа I и типа II с нечётными i образуют ломаную от C до D

рёбра типа III и типа IV с чётными i образуют ломаную от D до A

⇓

Ломаная замкнута, т.к. все звенья состоят в перечисленных выше ломаных, а они обр. замкнутую. Концы звеньев лежат только на сторонах квадрата, с каждым концом ровно 2 звена => никакие 2 конца несоседних звеньев не совпадают и никакой конец одного звена не лежит внутри другого. => ломаная удовлетворяет условию.

Ответ: 250.

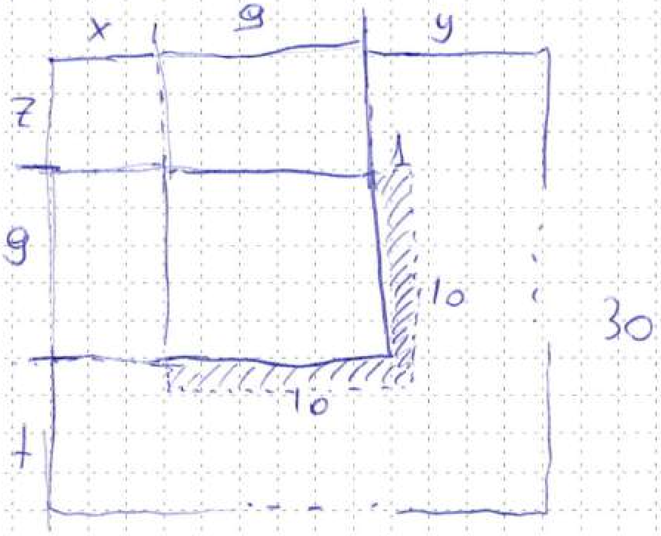
* они отличаются параллельным переносом на вектор, параллельный одной из сторон квадрата (стр. 2)

Задача № 5 Лист 1 из 2 Номер участника: 74

От противного.

Пусть есть квадрат 9×9, в котором менее 11 королей.

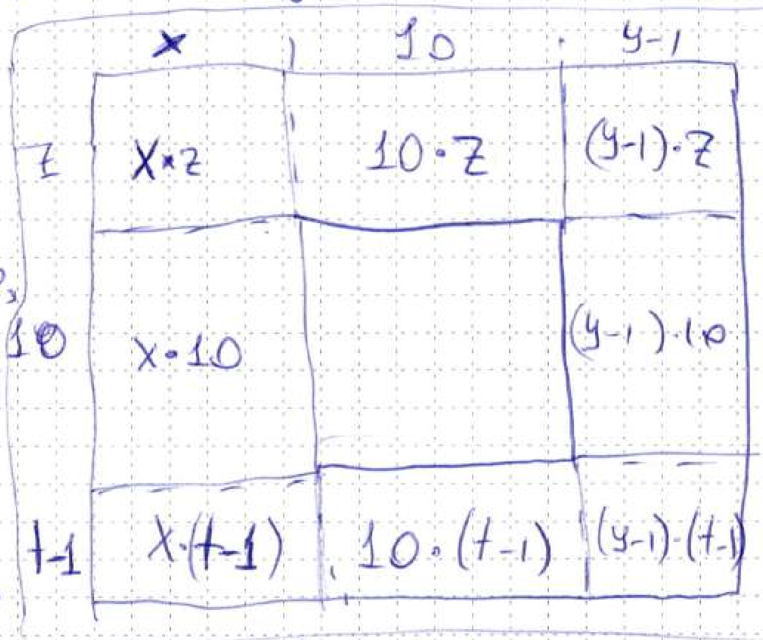
Обозначим отрезки, которые получаются при проекции сторон этого квадрата 9×9 на стороны 30×30, как x, y, z, t (см. картинку)



$x+y+9=30 \Rightarrow x+y=21 \Rightarrow$ среди x и y есть ровно одно нечётное.

Аналогично среди z и t есть ровно 1 нечётное.

НУО это y и t. Дополним квадрат 9×9 до квадрата $10\cdot10$, отложив строку и столбец в сторону этих нечётных отрезков*.



Все, что останется, если убрать этот квадрат 10×10, можно разбить на квадраты 2×2, потому что прямые, содержащие стороны квадрата 10×10, высекают из большого квадрата 8 прямоугольников с чётными (возможно, нулевыми, но это не мешает) сторонами, а каждый такой прямоугольник можно разбить. (набор сторон: $x, 10, y-1, z, 10, t-1$; каждое из этих чисел чётно).

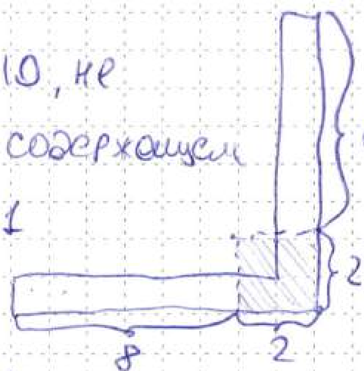
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 5 Лист 2 из 2 Номер участника: 74

Посчитаем, какое наибольшее число королей может стоять на доске

• В выделенном квадрате 9×9 не более 10, потому что мы взяли такой квадрат

• В фигуре, дополняющей 9×9 до 10×10, не более $4+4+1=9$, т.к. в квадрате 2×2, содержащем 3 её клетки (см. рисунок) не более 1 короля (2 короля в квадрате 2×2 будут бить друг друга), а в каждом из оставшихся прямоугольников 1×8 нет королей в соседних клетках $\Rightarrow$ не более 4 в каждом



• В оставшейся части в каждом 2×2 не более 1 короля, а квадратов 2×2 в 4 раза меньше, чем всего клеток (в 2×2 4 клетки). Всего клеток ~~[illegible]~~

$\underbrace{30\cdot30}_{900}-\underbrace{10\cdot10}_{100}=800\rightarrow$ квадратиков $200\rightarrow$ королей ≤200

Всего $\leq 10+9+200=219<220$. Такое невозможно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходное утверждение верно, ч.т.д.

*они нечётны $\Rightarrow$ хотя бы 1 $\Rightarrow$ откладываемые строка и столбец точно поместятся.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 74

Отметим точку T на продолжении AD за A так, что AT = 2 (единичный отрезок показан как AD), AC=BD, ∠ACD = ∠BDT, CD = DT =>

=> $\triangle ACD \overset{I}{=} \triangle BDT$ => AD = BT = 1

⇓

∠BTA = ∠ADC (*)

∠BAT = 180° − ∠BAD = 180° − 150° = 30°

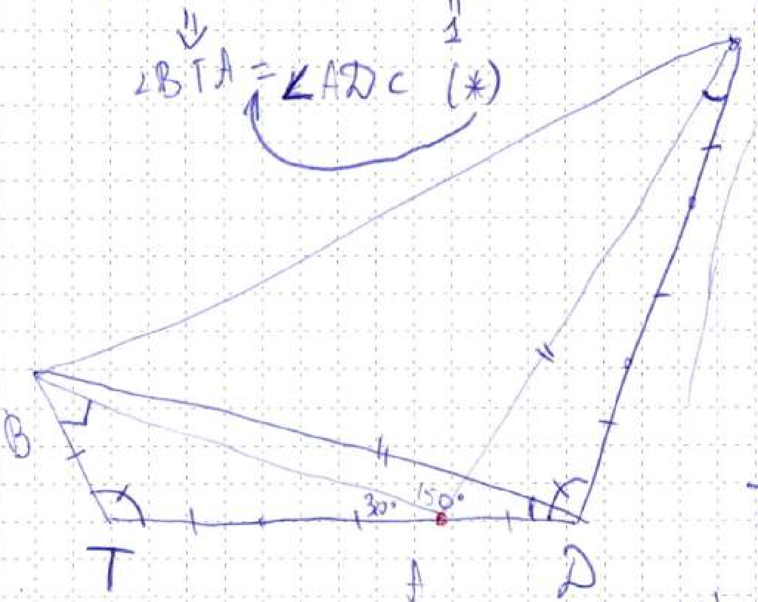
по т. синусов △ABT:

$$\frac{\sin\angle BAT}{\sin\angle TBA} = \frac{BT}{TA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\angle TBA} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\angle TBA}$$

1 △ п

7 ин



$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\angle TBA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\angle TBA = 1$$

⇓

∠TBA = 90°

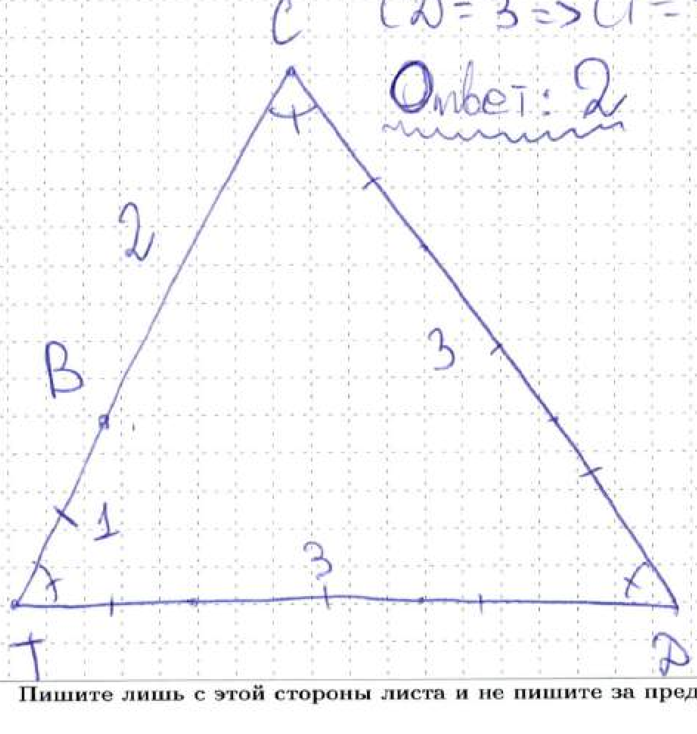
∠BTA = 180° − ∠TAB − ∠TBA = 180° − 30° − 90° = 60° $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ ∠ADC = 60°

TD = DC, ∠TDC = 60° => △TDC равносторонний

∠DTB = 60° => B лежит на стороне CT этого треугольн.

CD = 3 => CT = 3 => CB = 3 − BT = 2

Ответ: 2



Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 74

Пусть может. Обозначим это простое число за p

$(abc+1)p^2 = (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$

т.к. левая часть делится на p^2 => правая делится на p^2 => либо в правой части есть кратный p^2 множитель, либо есть два кратных p множителя. (множитель - скобка $(xy+x+1)$)

1° один, кратный p^2. НУО это $ab+a+1$

$(ab+a+1) \vdots p^2 \xrightarrow{\text{числа натуральные}} ab+a+1 \geq p^2 \xRightarrow{\text{произведения равны}} abc+1 \geq (bc+b+1)(ca+c+1) \geq (bc+1)(ac+1)$

$bc+b+1 \geq bc+1$, $ca+c+1 \geq ac+1$

$abc+1 \geq \underset{\geq abc}{abc^2} + \underbrace{ac+bc}_{>0} + \underset{\geq 1}{1} > abc+1$

Невозможно

2° две скобки кратны p. НУО это $ab+a+1$ и $bc+b+1$

сократим обе части на p^2

$abc+1 = \underbrace{\frac{ab+a+1}{p}\cdot\frac{bc+b+1}{p}}_{=M\in\mathbb{N}}\cdot(ca+c+1) = M\cdot(ca+c+1)$

их произведение обозначим M

тогда $abc+1 \vdots ac+c+1$

~~[illegible]~~

$ab+a+1 \vdots p$

$bc+b+1 \vdots p \xrightarrow{\text{домножим на } a} abc+ab+a \vdots p$

$\Downarrow$

$abc+ab+a-ab-a-1 \vdots p$

$abc-1 \vdots p$

$ab+a+1 \vdots p \Rightarrow abc+ac+c \vdots p \Rightarrow abc+ac+c-abc+1 \vdots p \Rightarrow ac+c+1 \vdots p$

Значит, $abc+1 \vdots p$, т.к. $abc+1 \vdots ac+c+1$

$(abc+1)-(abc-1)=2 \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p=2$

+ ММ 7 ВЗ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

$ab+a+1 \vdots p \Rightarrow ab+a \not\vdots \underset{2}{p}$ $a(b+1) \not\vdots 2 \Rightarrow a \not\vdots 2$ и $b+1 \not\vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 2 \Rightarrow abc-1 \not\vdots 2$ но оно делится (см. выше).

Значит, не может.

Ответ: НЕТ

Задача № 8 Лист 1 из ~~2~~ 3 Номер участника: 74

Найдём $\frac{23\cdot 24}{2}+1$ множеств, которые не представляются как сумма менее 25 ~~весов~~ из оставшихся гирь

~~Упорядочим множество~~

7ок + С6

Упорядочим веса гирь как $a_1 \leq \ldots \leq a_{50}$.

~~Для~~ Назовём "изначальным" множество гирь с весами $a_4, a_6, a_8, \ldots, a_{50}$. (ровно 24 ~~гири~~ веса)

Далее будем последовательно увеличивать индексы весов гирь; после каждого увеличения на 1 тоже будет получаться подходящее множество. (→ обозн. замену.)

$a_{48} \longrightarrow a_{49}$ +1 множество (получилось $a_4, a_6, \ldots, a_{46}, a_{49}, a_{50}$)

$a_{46} \to a_{47} \to a_{48}$ +2 множества

$a_{44} \to a_{45} \to a_{46} \to a_{47}$ +3 множества

$\vdots$

$a_4 \to a_5 \to \ldots \to a_{27}$ +23 множества

каждый раз меняем вес на больший

Итого $1+1+2+\ldots+23 = 1+\frac{23\cdot 24}{2}$

(В конце получится множество $a_{27}, a_{28}, \ldots, a_{50}$)

Докажем, что любое такое множество не представимо в виде суммы менее 25 из ост. ~~гирь~~ весов

Сумма ~~гирь~~ весов любого такого множества более ~~в~~ суммы максимальных 24 из оставшихся ~~гирь~~ весов, т.к. максимум из нашего больше максимума из оставшихся, второе по максимальности ~~больше~~ больше, чем второе по максимальности из оставшихся и т.д.*

Задача № 8 Лист 2 из 3 Номер участника: 74

Также, если какое-то, кроме $a_{27}, \dots, a_{50}$ из таких множеств представляется в виде суммы 26 оставшихся весов, то $a_{27}+\dots+a_{50} > a_{26}+\dots+a_1$, т.к. сумма ~~[illegible]~~ максимальных 24 > сумма каких-то 24 = сумма этого множества = сумма каких-то 26 > сумма минимальных 26 $\Rightarrow a_{27}+\dots+a_{50}$ нельзя представить

Тогда сумма в любом из наших множеств равна сумме оставшихся 26 минус какое-то из ~~[illegible]~~ них***. Упорядочим эти множества от "первого" до "последнего" в порядке их получения. Тогда, "в сумма весов" в каждом следующем больше суммы в предыдущем, и сумма оставшихся для каждого следующего меньше, чем для предыдущего. Тогда каждый раз мы не берём в равную нашему множеству сумму всё меньший ~~[illegible]~~ вес** $\Rightarrow$ мы не сможем сделать больше множеств, чем есть весов $\Rightarrow \frac{24\cdot23}{2} - 1 \leq 50$

переходов к следующему множеству без последнего

$\frac{24\cdot23}{2} = 12\cdot23 \geq 10\cdot20 = 200$ ~~[illegible]~~

$\frac{24\cdot23}{2} - 1 \geq 200-1 > 50$ так нельзя.

Ответ: нет.

*до того, как мы добавим i-ое по максимальности число, ~~до~~ больше него есть ровно i-1 ~~невыбранное~~ невыбранный в множество вес. Во время и после движения - ещё меньше.

**иначе мы не получим сумму хотя бы такую, как у нас в новом множестве.

Задача № 8 Лист 3 из 3 Номер участника: 74

*** Сумма в любом из таких множеств равна сумме 25 из 26 оставшихся, что равно сумме оставшихся минус то оставшееся, которое мы не взяли.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!