10:26–10:28

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ФИНК

Имя: АРТЁМ

Отчество: ЕВГЕНЬЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Самарская область

4. Контактный телефон 89277249272

5. Контактный электронный адрес artemka.fink@gmail.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Рink Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Значения k, ~~для~~ которые есть от 1 до 7 — $2, 3, 4, 5, 6$. ~~Значит, у н~~

~~Давай~~ Можем заметить, что среди k последовательных натуральных чисел встречаются все остатки по модулю k, причём каждый ровно один раз.

Тогда, давайте узнаем, что говорит о числе то, что оно k-хорошее при $k=2,3,4,5,6$.

$k=2$:

$0+1 \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow n \not\vdots 2$

$k=3$

$0+1+2 \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow n \vdots 3$

$k=4$:

$0+1+2+3 \underset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow \begin{matrix} n \vdots 2 \\ n \not\vdots 4 \end{matrix}$

$k=5$:

$0+1+2+3+4 \underset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow n \vdots 5$

$k=6$

$0+1+2+3+4+5 \underset{6}{\equiv} 3 \Rightarrow \begin{matrix} n \not\vdots 2 \\ n \vdots 3 \end{matrix}$

Тогда, невозможно сделать так, чтобы число было k-хорошим для всех возможных у нас k, ведь число не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим. Значит, ~~мы можем~~ Вася может получить не более 4-х ~~5~~ пятёрок.

Пример на 4 пятёрки:

$45 = 22+23 \Rightarrow$ 2-хорошее

$45 = 14+15+16 \Rightarrow$ 3-хорошее

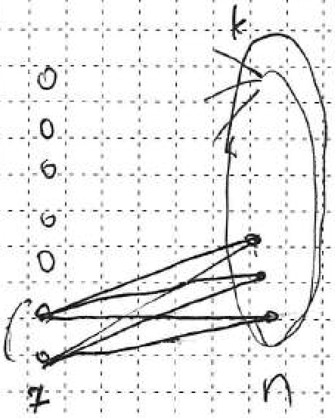
$45 = 7+8+9+10+11 \Rightarrow$ 5-хорошее

$45 = 5+6+7+8+9+10 \Rightarrow$ 6-хорошее

Ответ: Вася мог получить не более 4-х пятёрок.

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Финк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Изобразим ситуацию в виде двудольного графа, где 1 доля – кружки, 2 доля – ученики. Пусть у нас $6 < n < 60$ учеников, и ~~каждых~~ каждый ученик ходит на k ~~каких~~ кружков.

Тогда, давайте подсчитаем кол-во учеников исходя из общих у кружков.

Мы можем выбрать $C_7^2 = 21$ пар кружков, и для каждого из них у нас 3 общих ученика, значит таким образом мы подсчитали $21 \cdot 3 = 63$ ученика. Однако, каждого ученика мы подсчитали ровно C_k^2 ~~но~~ раз, ведь ~~каждого~~ ученика подсчитали для каждой пары кружков, которые он посещает.

Тогда, составим выражение:

$C_k^2 \cdot n = 63$ Поскольку все ~~слагаемые~~ множители – натуральные, то рассмотрим возможные варианты разложения 63:

6 $n \sim C_k^2$

	n	C_k^2	k	возможно ли?
$63 =$	63	$\cdot 1$	2	X $(n<60)$
$63 =$	21	$\cdot 3$	3	✓
$63 =$	9	$\cdot 7$	∅	X
$63 =$	7	$\cdot 9$	∅	X
$63 =$	3	$\cdot 21$	7	X $(n>6)$
$63 =$	1	$\cdot 63$	∅	X $(n>6)$

~~возможно~~ Значит, ~~возможно~~ ~~только 21 ученик~~ возможно только если учеников 21.

Ответ: 21 ученик в этом классе

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Финк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Для начала докажем, что ~~b~~ $(a-1)^2 \le b+c+1$:

$(a-1)^2 \overset{?}{\le} b+c+1$

$a^2-2a+1 \overset{?}{\le} b+c+1 \quad \Big| +2a-1$

$a^2 \overset{?}{\le} 2a+b+c \qquad \boxed{a+b+c=a^2+b^2+c^2}$

$a^2 \overset{?}{\le} a^2+b^2+c^2+a \quad \Big| -a^2$

$b^2+c^2+a \overset{?}{\ge} 0 \quad \Big| \Rightarrow (a-1)^2 \le b+c+1.$

$a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0$

Аналогично, $(b-1)^2 \le a+c+1$, $(c-1)^2 \le a+b+1$

Тогда, поскольку числители меньше знаменателей, ~~[illegible]~~ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}+\frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}+\frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{1+a+b+c}=\frac{3+a^2+b^2+c^2-a-b-c}{1+a+b+c}=\frac{3}{1+a+b+c}$$

ч.т.д.

Задача № 4 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Финк Артём.

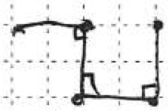
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Оценка:

~~Рассмотрим группы паралле~~

Разобьём ~~для~~ звенья ломаной на группы, где в одной группе все звенья, прямые которых содержащие параллельны или совпадают. ~~Тогда~~ Также каждой группе сопоставим группу звеньев, ~~которые~~ ~~перпе~~ прямые которых содержащие перпендикулярны прямым, ~~этой группы~~ содержащим звенья этой группы. Назовём такую пару групп „перпендикулярной". Тогда, для каждого звена ~~их мо~~ перпендикулярных ему звеньев не более, чем звеньев в перпендикулярной группе.

Отметим также, что если у нас ровно 2 группы, ~~то тогда от никакие 2 звена не смогут пересечься не в узлах, ведь~~ то либо эти группы не перпендикулярны, и тогда пересечений под прямым углом быть не может, либо пересечений не в узлах впринципе не будет, ведь все звенья будут ~~идти~~ лежать на некой сетке (все звенья ведь равны по длине), а значит снова невозможны перпендикулярные пересечения.

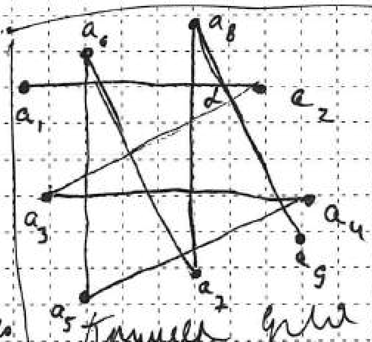


Значит, ~~если~~ поскольку ответ 0 нас явно не устраивает, группы хотя-бы 3. Но, если их ровно 3, то одной из групп не достанется перпендикулярной пары и ответ снова 0.

Задача № 4 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Финк Артём

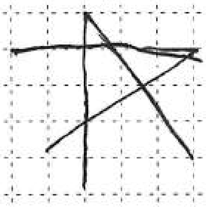
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Значит, групп хотя-бы 4. По принципу усреднения в одной из групп не более 250 звеньев, тогда в перпендикулярной ей группе у каждого звена не более 250 перпендикулярных пересечений.
Значит, k не более 250.
Пример:
Пусть длина каждого звена - 1. ~~Тогда~~
Построим ломаную по следующему алгоритму:
Возьмём ~~первуюое~~ первое звено и проведём второе под углом α, угол α может быть сколько угодно мал.



Пример для 8 звеньев и $k \leq 2$

Затем, проведём ~~следую~~ третье звено параллельно первому, четвертое параллельно второму, и аналогично до 500 звения.
501 будет перпендикулярно 1, 3, 5, ..., 499 звеньям, 502 будет перпендикулярно 2, 4, 6, ..., 500 звеньям, ~~и ано~~ 503 будет параллельно 501 звену, 504 будет параллельно 502 звену, и ~~ан~~ аналогично оставшиеся звения. Давайте докажем, почему мы можем взять такой угол α, что конструкция будет выполнима.



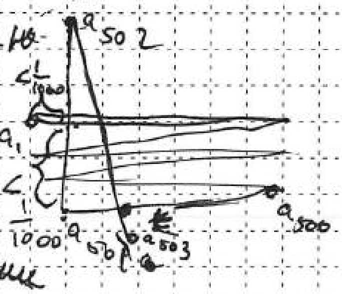
~~Пронумеруем узлы~~
Назовём узлы $a_1, a_2, \dots, a_{1001}$,
с ~~него~~ условленного точки начала цепи, т.е. с первого звена.

Задача № 4 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Финк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Можем заметить, что мы можем взять сколь угодно малый угол α, что расстояние от a_{501} до первого звена будет сколь угодно мало, и расстояние от a_1 до 501 звена будет также сколь угодно мало. Тогда, возьмём такой угол α, что расстояние от a_{501} до a_1 до 501 звена будет меньше $\frac{1}{1000}$ и расстояние от a_{501} до 1 звена будет меньше $\frac{1}{1000}$.

Тогда, звенья неизбежно пересекутся, ~~ведь расс в этом~~, ведь расстояние всегда есть и оно достаточно мало. ~~Поскольку расстояние меньше самих звеньев~~, то ч



При этом, 501 звено также гарантированно пересекло все остальные звенья, ведь они все будут лежать по ~~одн~~ одну сторону с a_1 относительно 501-го звена по построению.

~~Одн~~ Можем заметить, что 502 звено тогда гарантированно пересекает 500-е и все чётные до, ведь в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, а значит какая-то часть обязательно проходит дальше (см. рис. 1)

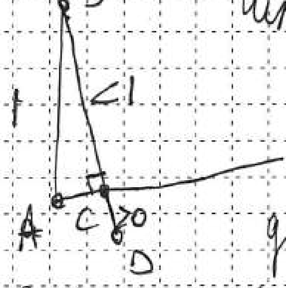


рис. 1

Аналогичные рассуждения применимы для всех остальных звеньев, ведь у нас нет нижнего ограничения чтобы выполнялось пересечение.

Ответ: ~~250 то~~ k = 250

Почему такую каждую можно сделать длиннее?

10:07 – 10:11 ; 11:57 – 11:59

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ФИНК

Имя: АРТЁМ

Отчество: ЕВГЕНЬЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

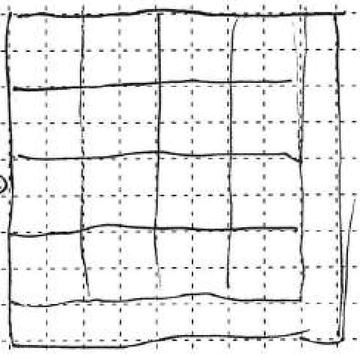
3. Регион Самарская область

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Чин Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте разобьём доску 30×30 на 225 квадратов 2×2. Можем заметить, что в каждом квадрате 2×2 помещается не более 1 короля, а королей у нас 220, значит ровно 5 квадратов 2×2 пустуют.

Теперь, когда мы рассматриваем квадрат 9×9, мы в нём гарантированно найдём 16 квадратов 2×2 целиком внутри. Тогда,

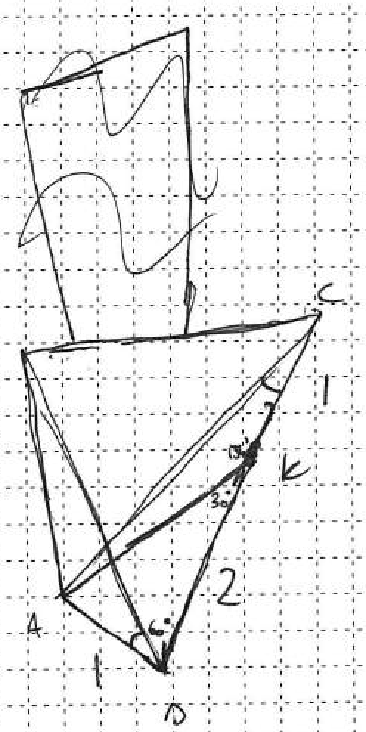


поскольку всего на всей доске в каждом квадрате 2×2 кроме 5 находится по королю, то среди 16 квадратов 2×2 внутри нами рассматриваемого 9×9 хотя-бы 11 из квадратов будут содержать по королю. Значит, мы всегда найдём хотя-бы 11 королей.

~~Ответ~~ Ч.т.д.

Задача № 6 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Финк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Отметим такую точку K на стороне CD, что $CK = 1$. Тогда $KD = 3 - 1 = 2$.

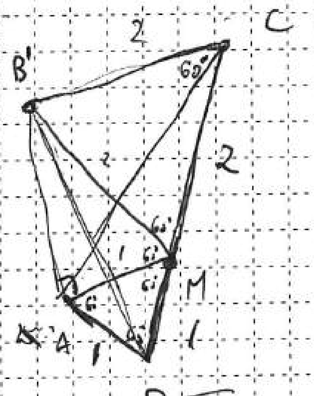
Рассмотрим $\triangle ACK$ и $\triangle BDA$. Имеем:

$CK = AD = 1$, $AC = BD$, $\angle ACK = \angle BDA$ $\Rightarrow \triangle ACK = \triangle BDA \Rightarrow \angle AKC = \angle BAD = 150^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AKD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ (смеж.)

$\angle AKD = 30^\circ$, $\frac{KD}{AD} = \frac{2}{1} = 2$ $\Rightarrow$ (по св-ву о 30°) $\triangle KAD$ — прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ADK = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$



Воспользуемся обратным ходом. Пусть есть $\triangle ACD$, и $\angle ADC = 60^\circ$, $AD = 1$, $CD = 3$. Докажем, что мы можем однозначно восстановить точку B, ~~Отметим так~~ если $\angle BAD = 150^\circ$, $BD = AC$.

Отметим такую т. M на стор. CD, что $MD = 1$. Тогда $CM = 3 - 1 = 2$.

т.к. $AD = 1$, $MD = 1$, $\angle ADM = 60^\circ$ $\Rightarrow \triangle ADM$ — р/с $\Rightarrow AM = 1$, $\angle AMD = 60^\circ$, $\angle MAD = 60^\circ$.

~~Отметим~~ Построим на CM р/с $\triangle B'CM$.

т.к. $\triangle B'CM$ — р/с $\Rightarrow B'M = 2$, $B'C = 2$, $\angle B'MC = 60^\circ$.

т.к. $\angle B'MC = 60^\circ$, $\angle AMD = 60^\circ$ $\Rightarrow \angle AMB' = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

Задача № 6 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Финк Артём

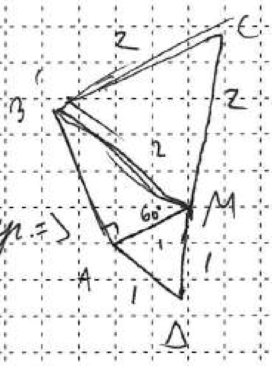
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

т.к. $B'M = 2$, $AM = 1$

т.к. $\angle AMB' = 60^\circ$, $\dfrac{B'M}{AM} = \dfrac{2}{1} = 2$ $\Rightarrow \triangle B'AM$ – прямоуг. $\Rightarrow$ (по обр. теор. о 30°)

$\Rightarrow \angle B'AM = 90^\circ$

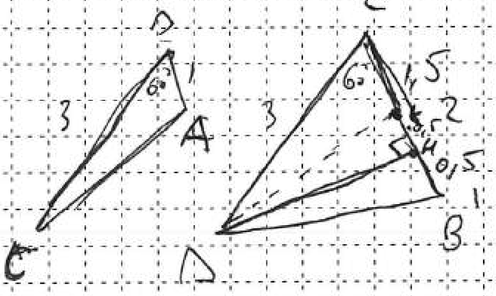
$\angle MAD = 60^\circ$



т.к. $\angle B'AM = 90^\circ$, $\angle MAD = 60^\circ$ $\Rightarrow \angle B'AD = \underline{150^\circ}$

Докажем, что $B'D = AC$.

Опустим из т. D высоту ~~DH~~ на BC.



т.к. $\triangle DCH$ ~~прямоуг.~~ $\Rightarrow$

$\angle DCH = 60^\circ$

$\Rightarrow 2CH = CD \Rightarrow CH = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow BH = 2 - 1,5 = 0,5$

Отметим такую т. K на CH, что $KH = 0,5$.

Тогда $CK = 1,5 - 0,5 = 1$.

т.к. Рассмотрим $\triangle KDB$.

т.к. $KH = HB = 0,5$, DH – высота $\Rightarrow$ DH – медиана, DH – высота $\Rightarrow \triangle KDB$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow KD = BD$.

Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle DCK$.

т.к. $DA = CK = 1$, $CD = DC = 3$, $\angle CDA = \angle DCK = 60^\circ$ $\Rightarrow \triangle CDA = \triangle DCK \Rightarrow AC = DK = BD$.

Задача № 6 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Чинк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Можем заметить, что точка B' задаётся однозначно. Но, т.к. мы отмечаем ~~на~~ точку на прямой, образующей ~~угол 150° с AD~~ угол 150° с AD, и при этом так, чтобы отрезок B'D был равен фиксированному отрезку AC. На прямой AB' таких точек две, но поскольку $\angle B'AD = 150°$, то второй вариант невозможен (ABCD – выпуклый).
Точки B и B' задаются одинаково и однозначно, значит мы восстановили точку B, в процессе получив, что $BC = 2$.
Ответ: $BC = 2$

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Динк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Для начала, у нас имеется два варианта:~~

~~либо~~ 1

Предположим, что это возможно.

Тогда, либо простой множитель содержится в хотя-бы двух множителях, либо он целиком лежит в одном из них.

Но, второй вариант ~~это~~ невозможен, т.е. тогда $ab+a+1$ и $bc+b+1$ полностью сократились (БОО) при делении на $abc+1$ (~~наши множители~~ стали бы частью (ведь их простые множители отличны от простого числа, квадрат которого мы получили), т.е. $abc+1 \vdots (ab+a+1)(bc+b+1)$, но $(ab+a+1)(bc+b+1) > ab^2c+1+a+b > abc+1$

~~Пусть~~ БОО: $bc+b+1 \vdots p$, $ca+c+1 \vdots p$.

$$\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} = p^2.$$

Тогда $(bc+b+1, ca+c+1) \vdots p$, ~~$bc+b+1, b$~~

$(bc+b+1, ca+c+1) = (bc+b+1, abc+bc+b)$, ведь мы можем домножить ~~число на~~ на число, взаимнопростое другому, без изменения НОДа, и $(bc+b+1, b) = (1, b) = 1$

$(bc+b+1, abc+bc+b) = (bc+b+1, abc-1) \vdots p \Rightarrow abc-1 \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \equiv_p 1$

Также, т.к. $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow b(c+1) \equiv_p -1$

$c \equiv_p bc+b+c+1 = (b+1)(c+1)$

т.к. $ca+c+1 \vdots p \Rightarrow c(a+1) \equiv_p -1$

$a \equiv_p ca+c+a+1 = (c+1)(a+1)$

Задача № 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Ранк Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$abc \equiv 1 \Rightarrow$

$b \equiv_p (a+1)(c+1) \Rightarrow b(a+1)(b+1)(c+1)^2 \equiv_p 1 \Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1) \equiv_p -1 \Rightarrow$

$a \equiv_p (a+1)(c+1)$ $\quad b(c+1) \equiv_p -1$

$\Rightarrow (a+1)^3(b+1)^2(c+1)^2 \equiv_p 1$

$b(a+1)(b+1)(c+1)^2 \equiv_p 1 \Rightarrow b \equiv_p (a+1)(b+1) \Rightarrow ab+a+1 \vdots p.$

Чтобы у нас получилось p второй степени, при делении хотя-бы один множитель p должен сократится, т.е. $abc+1 \vdots p$.
Но $abc \equiv_p 1 \Rightarrow abc+1 \equiv_p 2$, $\Rightarrow$ значит $p=2$.

Однако, ab и т.д. $abc \equiv_2 1 \Rightarrow$ $a \equiv_2 1$, $b \equiv_2 1$, $c \equiv_2 1$, или же a, b, c нечетны.

А если a, b, c нечетны, то и $ab+a+1$ - нечетно, ведь нечетное + нечетное + нечетное = нечетное, но $ab+a+1 \vdots 2$. Противоречие.
Значит, наше предположение было неверно и это невозможно.

Ответ: Нет, это невозможно