Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 21

Если число 2-хорошее, то оно представленное в виде $a+(a+1)=2a+1$ т.е. оно нечетное. Если число 4-хорошее, то оно представленная в виде $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)=4a+6$ т.е. оно четное. Значит число не может быть одновременно 2-хорошим и 4 хорошим и т.к. всего возможных k $6-2+1=5$ (от 2 до 6), и среди них есть 2 и 4, то Вася получит $\leq 5-1=4$ пятерки.

Пример: $n=45$ 2, 3, 5, 6-хорошее т.к. $45=22+23$, $45=14+15+16$, $45=7+8+9+10+11$, $45=5+6+7+8+9+10$.

Ответ: 4.

+ КА

7

7 М

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 21

Пусть в классе n учеников и $\forall$ из них посещает k кружков.
Подсчитаем кол-во галочек т.е. наборов ученик и ровно два кружка, которые он посещает. С одной стороны таких наборов $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3=63$ т.к. всего пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2}$ и в эти два кружка одновременно ходит ровно 3 человека. С другой, таких наборов $n\cdot\frac{k(k-1)}{2}$ т.к. для каждого ученика есть $\frac{k(k-1)}{2}$ пар кружков, которые он посещает.
Значит $n\cdot\frac{k(k-1)}{2}=63$ и $1\le\frac{k(k-1)}{2}\le 63$. Тогда $\frac{k(k-1)}{2}$ может быть равно $\frac{2\cdot 1}{2}=1$, $\frac{3\cdot 2}{2}=3$, $\frac{4\cdot 3}{2}=6$, $\frac{5\cdot 4}{2}=10$, $\frac{6\cdot 5}{2}=15$, $\frac{7\cdot 6}{2}=21$, $\frac{8\cdot 7}{2}=28$, $\frac{9\cdot 8}{2}=36$, $\frac{10\cdot 9}{2}=45$, $\frac{11\cdot 10}{2}=55$ т.к. при $k\ge 12$ $\frac{k(k-1)}{2}\ge\frac{12\cdot 11}{2}=66>63$. Но $\frac{k(k-1)}{2}=6,10,15,28,36,45,55$ не подходят т.к. 63 не делится на 6, 10, 15, 28, 36, 45 и 55. Значит $\frac{k(k-1)}{2}=1, 3$ или 21 т.е. $n=63, 21$ или 3. Но т.к. в классе >6 и <60 уч., то $n=21$.
Пример: пронумеруем учеников и кружки. Тогда уч. с номерами 1, 2, 3 будут посещать кружки с номерами 1, 2, 3, уч. 4, 5, 6 кружки 1, 4, 5, уч. 7, 8, 9 кружки 1, 6, 7, уч. 10, 11, 12 кружки 2, 5, 6, уч. 13, 14, 15 кружки 2, 4, 7, уч. 16, 17, 18 кружки 3, 4, 6, уч. 19, 20, 21 кружки 3, 5, 7. Тогда всего 21 ученик, $\forall$ из них посещает 3 кружка и для $\forall$ двух кружков их оба посещают 3 ученика т.к. $\forall$ пара кружков есть в тройках (1,2,3), (1,4,5), (1,6,7), (2,5,6), (2,4,7), (3,4,6), (3,5,7) ровно по одному разу (пары с 1,2,3 очевидно по одному разу, а с 4,5,6,7 также по 1 разу т.к. в последних 6 тройках по 1 паре только с 4,5,6,7 и все они различны) и ровно 3 ученика ходят в $\forall$ тройку кружков.
Ответ: 21.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 21

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}=\frac{a^2-2a+1}{b+c+1}=\frac{a^2-(a^2+b^2+c^2-b-c)-a+1}{b+c+1}=\frac{b+c-a-b^2-c^2+1}{b+c+1}=1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$$ т.к.

$a=a^2+b^2+c^2-b-c$. $1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}\le 1-\frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}$ т.к. $\frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}\le\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$ т.к.

$b+c+1\le a+b+c+1$. и $a,b,c\ge 0$. Значит $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\le 1-\frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}$. Аналогично

$\frac{(b-1)^2}{a+c+1}\le 1-\frac{a^2+c^2+b}{a+b+c+1}$, $\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le 1-\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1}$. Значит $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le 3-$

$$-\left(\frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}+\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1}+\frac{a^2+c^2+b}{a+b+c+1}\right)=3-\frac{a+b+c+2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c+1}=\frac{3(a+b+c+1)-3(a+b+c)}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}\ \blacksquare$$

+ТА

7

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 21

0 ТМ

Ответ: ~~750~~ 125

Пример на n=2: расположим 1000 точек на окр-ти так, чтобы окр-ть была разделена на 1000 равных дуг. Тогда если эти точки вершины ломаной, то ∀ вершина будет соединена с точками, соседними к диам. прот. ей. ~~Рассмотрим любое звено~~

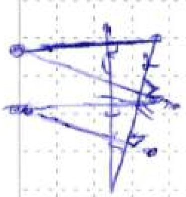
Полученная фигура замкнутая 1000-звенная ломаная т.к. если рассм. граф, где верш. — верш. ломаной, ребра — звенья, то из ∀ верш. выходит 2 ребра и граф связен т.к. если пронумеровать изн. точки, то из ∀ верш. можно будет попасть в ∀ другую той же четности и в верш. другой четности т.е. от ∀ можно добраться до ∀.

Значит этот граф — цикл т.е. получ. фигура 1000-звенная ломаная.

Рассм. ∀ звено и пронумеруем вершины по кругу так, чтобы номера концов были 1 и 500. Тогда ему перп. ровно 2 звена т.к. ему перп. звенья с разностью номеров концов ×2 и среди них найдутся ровно 2 звена ломаной. Значит ∀ звено перп. ровно двум другим (ровно-по...) и соседние звенья не ⊥ т.е. т.к. ∀ два не соседних звена пересек., то ∀ звено пересекает ровно 2 других под прямым углом.

Пример на 125: сначала проводим из ∀ точки 2 равных звена под достаточно малым углом.

Далее ~~125~~ проведем 250 звеньев ⊥ первым двум чередуя: ⊥1, ⊥2, ... Далее проведем еще 248 звеньев ⊥ всем пров. кроме первых двух и параллельно им, чередуя ⊥3, ⊥4 (∥1) (∥2).



Далее ~~повторим что каждое последней вершины~~ построим симметрично относительно ~~прямой~~ между ~~такой~~ самой первой и самой последней вершиной, получим ровно 1000 вершин и ∀ звено пересекает ⊥ ровно 125 других и его пересек. под прям. углом т.к. ∀ разом проводим звено ⊥ боковой стороне р/б Δ, и ∠ при основании его < 90°.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 21

Оценка на 500: два соседних звена не могут быть $\perp$ одному и тому же, поэтому $\forall$ звену $\perp \le \frac{1000}{2} = 500$ других звеньев.

Оценка на 250: пусть $\forall$ звено $\perp$ k $\Rightarrow$ его перпенд. $\perp \ge k$ звеньев.

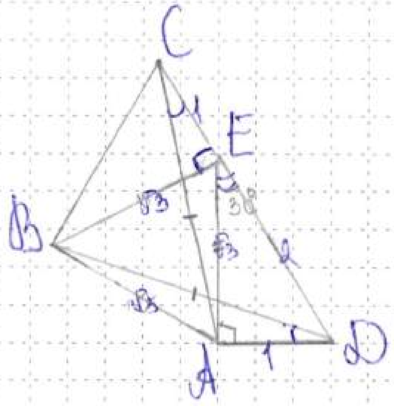
Если k звеньев перпенд.(включая это) $\ge k$ звеньев и из $\forall$ каждого выходит не менее? ≥ 1 звена т.к. всего $\ge 4k$ звеньев $\Rightarrow k \le 250$.

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 21

Разобьем доску на $\left(\frac{30}{2}\right)^3=225$ квадратов 2×2. Тогда в каждом из них стоит ≤ 1 короля т.к. если бы ~~...~~ стояло ≥ 2, то они били бы друг друга, что по условию невозможно. Значит во всех квадратах кроме каких-то пяти стоит ровно по одному королю. Рассмотрим $\forall$ квадрат 9×9. Тогда в нем лежит полностью 16 квадратов 2×2, т.к. он содержит кв. 8×8 идущий по границам кв. 2×2, в котором ровно 16 целых квадратов. Значит, т.к. во всех кв., кроме каких-то пяти стоит король, в этом кв. 9×9 стоит $\geq 16-5=11$ королей.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № ~~A~~ 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 21 + ск 7



Отметим на CD точку E так, чтобы $CE = AD = 1$.

Тогда $\triangle BAD = \triangle AEC$ по 2 пр. ($BD = AC$ (по усл.), $AD = EC$ (по постр.), $\angle ADB = \angle ECA$ (по усл.)). Значит $AB = AE$

и $\angle AEC = \angle BAD = 150^\circ$. Значит $\angle AED = 30^\circ$.

Рассмотрим $\triangle AED$. В нем: $\angle AED = 30^\circ$, $AD = 1$, $ED = 2$.

Значит т.к. сторона AD напротив $\angle AED = 30^\circ$ в 2 раза меньше прилежащей к углу стороне ED, то $\triangle AED$ — прямоуг. и $\angle EAD = 90^\circ$. Значит $AE = \sqrt{ED^2 - AD^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ и $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. ~~Значит~~ Рассм. $\triangle BAE$.

В нем: $AB = AE$ т.е. он р/б, $\angle BAE = 60^\circ$. Значит $\triangle BAE$ р/с т.е. $AB = AE = BE = \sqrt{3}$.

$\angle BEC = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - (\angle BEA + \angle AED) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$. Значит $\triangle BEC$ прямоуг.

т.е. $BC = \sqrt{CE^2 + BE^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

Ответ: 2.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 21

Пусть это возможно и $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1}=p^2$. Тогда возможны 2 случая: 1 сл.) одно из чисел $\vdots p^2$ (пусть $ab+a+1$) [т.е. $(ab+a+1)\ldots$] Тогда $\left(\frac{ab+a+1}{p^2}\right)\cdot(bc+b+1)\cdot(ac+c+1)=abc+1$. Но $\frac{ab+a+1}{p^2}\geq 1$ и $(bc+b+1)(ac+c+1)>abc^2+1\geq abc+1$ т.е. $\frac{ab+a+1}{p^2}\cdot(bc+b+1)\cdot(ac+c+1)>abc+1$ и $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{abc+1}>p^2$?!

Значит этот случай невозможен.

2 сл.) два числа делятся на p (пусть $ab+a+1$ и $bc+b+1$). Тогда $ab+a+1=a(b+1)+1\underset{p}{\equiv}0$ т.е. $b+1\underset{p}{\equiv}-\frac{1}{a}$ и $b\underset{p}{\equiv}-\frac{a+1}{a}$ т.к. если $a\,\vdots\,p$, то $ab+a+1\not\vdots\, p$. И $bc+b+1=b(c+1)+1\underset{p}{\equiv}0$ т.е. $c+1\underset{p}{\equiv}-\frac{1}{b}$ и $c\underset{p}{\equiv}-\frac{b+1}{b}=-\left(-\frac{a+1}{a}+1\right):\left(-\frac{a+1}{a}\right)=-\frac{1}{a+1}$ т.к. если $b\,\vdots\,p$, то $bc+b+1\not\vdots\, p$. Тогда т.к. $\left(\frac{ab+a+1}{p}\right)\cdot\left(\frac{bc+b+1}{p}\right)\cdot(ac+c+1)=abc+1$ и $\frac{ab+a+1}{p}$ и $\frac{bc+b+1}{p}$ целые, то $abc+1\,\vdots\,ac+c+1$. Но $ac+c+1\underset{p}{\equiv}a\cdot\left(-\frac{1}{a+1}\right)+\left(-\frac{1}{a+1}\right)+1=(a+1)\cdot\left(-\frac{1}{a+1}\right)+1\underset{p}{\equiv}0$ т.е. $ac+c+1\,\vdots\,p$ и тогда т.к. $abc+1\,\vdots\,ac+c+1$, то $abc+1\,\vdots\,p$. Но $abc+1\underset{p}{\equiv}a\cdot\left(-\frac{a+1}{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a+1}\right)+1\underset{p}{\equiv}2$ и $abc+1\,\vdots\,p$ только при $p=2$. Тогда $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{p^2}=\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{4}=abc+1$ и $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{4}>\frac{a^2b^2c^2+4abc}{4}$ т.е. $abc+1>\frac{a^2b^2c^2+4abc}{4}$ и тогда $4>a^2b^2c^2$ т.е. $abc<2$ и $abc=1$ и $a=b=c=1$. Но тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=27\not\vdots\, abc+1=2$?! Значит это невозможно.

Ответ: нет.

+

ССС

7

КАБ