Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

51 - 2А
аудитория – посадочное место

41306249
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ МГ	+ МС	~~0~~ МК	
7 АЮ	7 Ем.	7 Як	Ø АБ	21

№1

Ответ: 4

Пример: $n=105$

$k=2$:	$k=3$	$k=5$	$k=6$
$52+53$	$34+35+36$	$19+20+21+22+23$	$15+16+17+18+19+20$

Оценка:

Пускай, он мог получить больше 5. ≥ 5

Тогда он ~~загд~~ загадал такое n, что для каждого k от 2 до 6 оно k-хорошее.

Рассмотрим $k=2$ и $k=4$:

Пускай, первое число посл. — m и l соответственно:

$m+(m+1)=2m+1$ $\quad$ $l+(l+1)+(l+2)+(l+3)=4l+6$ —

но $2m+1$ — нечёт $\Rightarrow n$ нечёт., а $4l+6$ — чёт $\Rightarrow$ n чёт $\Rightarrow$ ⨯

~~№2~~

~~Посчитаем пастопырки 2 способами:~~

~~(пастопырка:).~~

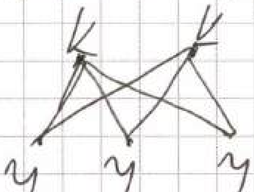
~~1) Для пары кружков:~~

~~— у каждой пары~~

№2

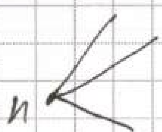
Построим граф, где вершины - ученики и кружки, а ребро соединяет У и К если У туда ходит. Рассмотрим рогатки вида: 

1) Для любой пары кружков найдётся ровно 3 рогатки:



$\Rightarrow$ всего их $3\cdot\frac{7\cdot6}{2}=63$

2) Пусть каждый ученик посещает n кружков, а всего учеников x:



- тогда для каждого ученика ~~найдётся~~ будет $\frac{n(n-1)}{2}$ рогаток, $\Rightarrow$ всего их $\frac{x\,n(n-1)}{2}$

~~x(n~~ $xn(n-1)=126$ - нужно решить урав. в натуральных числах, причём $6<x<60$. Вып. все дел. 126:

1; 2; 3; 6; 7; 9; 14; 18; 21; 42; 63; 126

x и $n(n-1)$ − 2 дел., обр. пару.

т.к. x $6<x<60$, $n(n-1)$:

3; 6; 7; 9; 14; 18

Возм. знач. $n(n-1)$:

2; 6; 12; 20; ... − единств. знач., которое

$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$

подходит − 6 $\Rightarrow n(n-1)=6$;

$\Rightarrow n=3$; $x=21$

Пример в виде таблицы, где + ребро:

	1	2	3	4	5	6	7
1	+	+	+				
2	+	+	+				
3	+	+	+				
4	+			+	+		
5	+			+	+		
6	+			+	+		
7	+					+	+
8	+					+	+
9	+					+	+
10		+		+		+	
11		+		+		+	
12		+		+		+	
13		+			+		+
14		+			+		+
15		+			+		+
16			+	+			+
17			+	+			+
18			+	+			+
19			+		+	+	
20			+		+	+	
21			+		+	+	

Сначала все + разбиваем на тройки. 1 с 2 и 3; 1 с 4 и 5; 1 с 6 и 7. Затем 2 с 4 и 6; 2 с 6 и 7. Затем 3 с 4 и 7; 3 с 5 и 6. Первые 3 очев. со всеми усл. выполняется, а послед. и каждый раз находятся в разной паре, $\Rightarrow$ могли все быть между собой.

Ответ: 21 ученик.

№3

БОО $a \ge b \ge c$. Оценим a сверху:

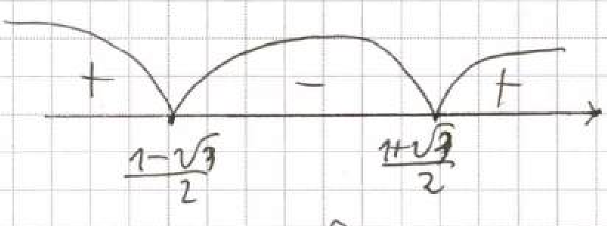
$a^2 - a = b(1-b) + c(1-c)$

$b(1-b) - \frac{1}{4} = -(b-\frac{1}{2})^2 \le 0 \Rightarrow b(1-b) \le \frac{1}{4}$ —

аналогично с c; $\Rightarrow$

$a^2 - a \le \frac{1}{2}$

$a^2 - a - \frac{1}{2} \le 0$



$D = 1 + 2 = 3$

$a_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ — т.к. ≤ 0 $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \le a \le \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ —

оценим.

Пускай $S = a+b+c+1$:

$$\frac{(a-1)^2}{S-a} + \frac{(b-1)^2}{S-b} + \frac{(c-1)^2}{S-c} \le \frac{3}{S}$$

Оценим сверху каждую дробь как $\frac{1}{S}$:

$$\frac{(a-1)^2}{S-a} \le \frac{1}{S}$$

$Sa^2 - 2aS + S \le S - a$ — имею право домножать без перемены знака, т.к. $S - a = b + c + 1 > 0$

$Sa^2 - 2aS + a \le 0$

$Sa - 2S + 1 \le 0$

$\cancel{a+2 \le S-1}$ $\cancel{a \le}$ $a - 2 \le -\frac{1}{S}$

$a \le 2 - \frac{1}{S}$

Оценим S:

Докажем, что $a+b+c \geq 1$:

иначе $a; b; c; < 1 \Rightarrow$ их квадраты их меньше $\Rightarrow$ равенство не вып.

$S = a+b+c+1 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{S} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2-\frac{1}{S} \geq \frac{3}{2}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3}{2}$

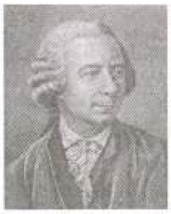
$\sqrt{3} \leq 2$

$3 \leq 4$ — для b и c аналогично.

Между $Sa^2-2aS+a \leq 0$

и $Sa-2S+1 \leq 0$ переход не равносильный, ведь a может быть $=0$, но т.к знак не строгий нер-во тоже будет выполняться.

$\Rightarrow$ каждая дробь $\leq \frac{1}{S}$, $\Rightarrow \frac{1}{S}+\frac{1}{S}+\frac{1}{S} \leq \frac{3}{S}$ ч.т.д.



8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

51 - 2А

аудитория – посадочное место

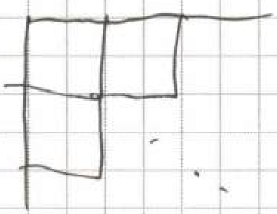
41306249

номер участника

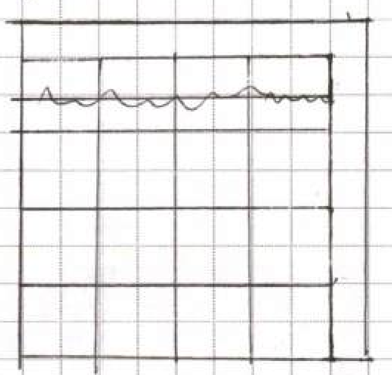
5	6	7	8	Σ
+ ПР	+ РХ	+ А.П.	— КЮ	
7 ЧЮ ✓	7 МС	7 КН	0 МК	21

№5

Разобьём доску 30×30 на квадраты 2×2:



– в каждом квадрате стоит не более 1 короля. Всего □ $900:4=225 \Rightarrow$ не более 5 □ не заняты (иначе по принципу Дир. найдётся □, в котором 2 короля.). От противного. Пусть такой □ 9×9 нашёлся:



– выделим в нём □ 8×8 так, чтобы его границы совпадали с линиями нашего разбиения. (Такой найдётся, т.к. линии идут через 2, то есть мы найдём □ (так чем, сторона $\Rightarrow$ □ 8×8.) в нём ~~16~~ $64:4=16$ □ 2×2. $\Rightarrow$ Максимум не заняты 5 из них, то есть хотя бы 11 заняты $\Rightarrow$ в нём хотя бы 11 королей $\Rightarrow$ в □ 9×9 хотя бы 11 королей.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

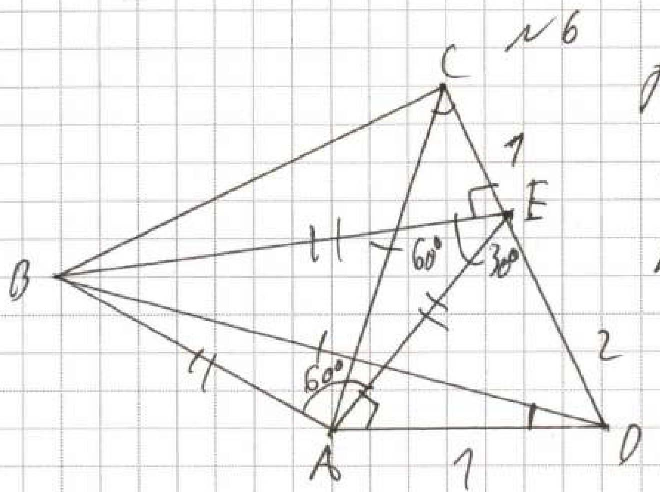
8 — класс

41306249 — номер участника

лист 2 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№6



Возьмём т. E такую, что $CE=1$

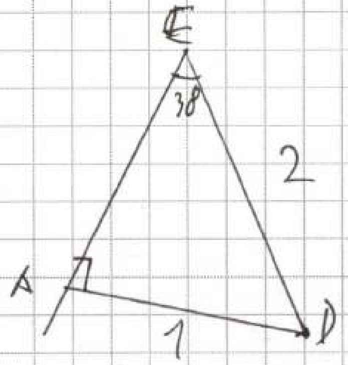
тогда $AC=BD$; $CE=AD$;

$\angle ACE = \angle ADB \Rightarrow$

$\triangle ADB = \triangle ACE$

$\Rightarrow AB=AE$; $\angle BAD=\angle AEC=150^\circ \Rightarrow \angle AED=30^\circ$ - внеш.

Посмотрим на $\triangle AED$:



— если бы угол $EAD=90^\circ$, что AD как раз 1. В противном случае, AD бы >1, ведь ~~перпен~~ $\perp$ — кратчайшее расстояние от ~~д~~ точки до прямой

$\Rightarrow \angle EAD=90^\circ$; $\angle BAE=150^\circ-90^\circ=60^\circ$

$\triangle ABE$ — ~~равност. с <60~~ р/б с $\angle 60^\circ \Rightarrow$ р/с

$\Rightarrow \angle AEB=60^\circ$; $BE=BA=AE$.

$\Rightarrow \angle BEC=150^\circ-60^\circ=90^\circ$; $CE=AD=1 \Rightarrow$

$\triangle BEC \overset{СУС}{=} \triangle AED \Rightarrow BC=ED=\boxed{2}$

№7

$(abc+1)\cdot n^2 = (ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)$

Если 1 множ. $\vdots n^2$, то 2 др. произв. 3 это хотя бы произв. 2 других что очевидно больше $abc+1$. $\Rightarrow$ есть 2 множ, каждый из которых $\vdots n$. БОО это 1 и 2:

$ab+a+1 \vdots n$ — во-первых, если это так

$bc+b+1 \vdots n$ то (a,n) и $(b,n)=1$.

~~$ab+a+1 \equiv abc+$~~

$bc+b+1 \underset{n}{\equiv} abc+ab+a \underset{n}{\equiv} abc-1 \underset{n}{\equiv} 0$

$ac+c+1 \underset{n}{\equiv} abc+bc+b \underset{n}{\equiv} abc-1 \underset{n}{\equiv} 0$ — то

есть 3 множ. тоже $\vdots n$.

$\Rightarrow abc+1 \vdots n$ (т.к. справа степ. вхожд. $n \geq 3$, а слева 2).

но $abc-1 \vdots n$, $\Rightarrow n \leq 2$ т.к. $2 \vdots n \Rightarrow n=2$

~~$\Rightarrow 4abc+4=$~~

$4(abc+1) = (ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)$

если хотя бы 1 из скобок ≥ 4, то произв. 2 других $> abc+1$. $\Rightarrow$ каждая $=3$ (не меньше, т.к. $a;b;c \geq 1$) $\Rightarrow a;b;c=1$

$abc+1=2$; $3^3=27$ $27 \not\vdots 2 \Rightarrow$ W

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306249 — номер участника

лист 4 из 4

№8 24 легкие > 22 тяжелые.

$a_1 \geq \ldots \geq a_{50}$

Возьмём сумму $a_{50}+\ldots+a_{27}$ — если она равна сумме $\leq 22a$, то тогда она $\leq a_1+\ldots a_{22} \Rightarrow a_1+\ldots+a_{22}+a_{23}+a_{24} > a_{25}+a_{26}+a_{27}+\ldots+a_{50}$

$\Rightarrow$?, т.к. эта сумма наим. a, в сумме ет равной $< 24a \Rightarrow$ 23 a. $\Rightarrow a_1+\ldots+a_{23} \geq a_{27}+\ldots+a_{50}$

~~Возьмём~~ & Возьмём $a_1+\ldots+a_{24}$. Если она равна сумме 25a, то

Нет продвижений