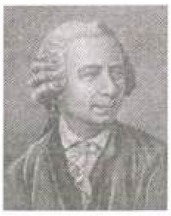


8

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;

☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;

☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 4 А
аудитория – посадочное место

41306306
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+. ОЛ	+ МС	— МК	
7 АЮ	7 ЕМ	7 Тк	0 АБ	21

① Приведем пример на ~~4-~~ $2,3,5,6$ хорошее число: 4 пятерки ($n=45$):

$45 = 5+6+7+8+9+10$ – 6-хорошее число
$45 = 7+8+9+10+11$ – 5-хорошее число
$45 = 14+15+16$ – 3-хорошее число
$45 = 22+23$ – 2-хорошее число. } 4 чисел k

6, 5, 3, 2 – удовлетворяют условию, ведь $1<k<7$.
Докажем, что больше 4 пятёрок он не может получить. Всего натуральных чисел k больших 1 и меньших 7 – 5 – 2, 3, 4, 5, 6. Значит нам нужно ~~то~~ доказать что 5 пятерок он получить не может. Если он может получить 5 пятерок, то натуральное число n и 2-хорошее и 4-хорошее одновременно, значит $n=a+(a+1)=2a+1$ ~~дв~~ a – натуральное число, а также $n=b+(b+1)+(b+2)+(b+3)=4b+6$ (b – натуральное) $\Rightarrow 4b+6=n=2a+1 \Rightarrow 4b+6=2a+1$, а так как a и b – натур., одно из этих чисел нечет. $(2a+1)$, а другое чёт $(4b+6)$. Противоречие. Значит кол-во пятерок ≤ 4.

Ответ: 4.

Хзебел из каждого n.

Число учеников посещенч

② По условию каждый ученик посещ. одинак. число кружков, обозначим его через n. Очевидно, что ~~$n<$~~ $n \in N$, $n \le 7$, ведь всего 7 кружков. Тогда всего ~~число~~ сумма количеств детей во всех кружках (считая одного n раз) $= 7nx$, где ~~x~~ x – кол-во детей., ~~тогда~~ ~~ея если~~ С другой стороны ~~сумма детей во всех кружках~~ $=$ ~~$2\cdot3\cdot21$~~ $\frac{2\cdot3\cdot21}{d}$ (d – ~~число~~ всего 21 пара д. кружков, а в ~~кото~~ каждой ровно по 3 ученика, которые посещают оба кружка $\Rightarrow$ кажется, что сумма количеств ~~посеще~~ детей во всех кружках (считая одного n раз) – $21\cdot3\cdot2$ но одного ученика в одном из кружков ~~мы~~ посчитаем в $n-1$ паре кружков ~~раз~~, ведь он посещает n кружков $\Rightarrow$ сумма детей во всех кружках $= \frac{21\cdot3\cdot2}{n-1}$, $n-1 =$ натур. ~~число~~ от ~~0(1−1)~~ 1 (2−1) до 6 (7−1), (значит $n \ne 1$) ведь на 0 делить нельзя. А $21\cdot3\cdot2$ при разложении на простые множители $= 7\cdot3\cdot3\cdot2$, а также ~~кол~~ сумма количеств детей в всех ~~+~~ кружках целая, $n-1 \ne$ ~~4~~ $2\cdot2=4$ (5−1), 5 (6−1), ~~2~~ $\Rightarrow n \ne 5$ или 6. Если $n = 2$ или 4 то $2x = \frac{2\cdot3\cdot21}{2-1} = 2\cdot3\cdot21 \Rightarrow x = 3\cdot21 = 63 > 60$, противоречие, или $4x = \frac{2\cdot3\cdot21}{4-1} = 2\cdot21 \Rightarrow x = \frac{2\cdot21}{4} = 10{,}5$ – нецелое, а x – натуральное, (ведь учеников не может быть нецелое число, отриц. число или 0, ведь их хотя бы 6) $\Rightarrow n \ne 2$ или 4. ~~Если $n=7$, то 7~~ На $n=7$ есть очевидный ~~пример~~ пример:

3	3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

0 – кружки ~~пример легко~~

1, 2, 3 – школьники которые их посещают указаны над ними!

Который посещает 7 кружков?

② А также $7x = \frac{21\cdot3\cdot2}{6} = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow x$ равно только 3 при $n = 4$, но $x > 6 \Rightarrow n \neq 7$. Если $n = 3$, то $3x = \frac{21\cdot2\cdot3}{2} = 21\cdot3 \Rightarrow x = 21$

+.

Приведём пример на $x = 21$:

18	21	9	21	18	15	21
17	20	8	20	17	14	20
16	19	7	19	16	13	19
12	15	6	12	15	12	18
11	14	5	11	14	11	17
10	13	4	10	13	10	16
3	3	3	6	6	9	9
2	2	2	5	5	8	8
1	1	1	4	4	7	7
o	o	o	o	o	o	o

o – кружки

1, 2, 3, 4, …, 21 – разными числами обознач. разные школьник, они располож. над кружком, в который ходят.

пример +

И какие бы из ~~обед~~ обвед. групп 1-2-3, 4-5-6, …, 19-20-21 не взяли они будут ходить в три кружка, а ост. группы по 3 в этих трех кружках будут различный $\Rightarrow$ во все тпиары кружков из этих трёх кружков будут ходить ровно по три человека в ~~оба~~ ~~на~~ кружка. А также ~~в ко~~ каждый из 21 ученика идет в $n = 3$ кружков. А также $x = 21 < 60$. Следовательно $x = 21$ удовлетворяет условию. Мы проверили все n от 1 до 7 и только 3 удовлетворяет ~~усл~~ условию $\Rightarrow x =$ только 21

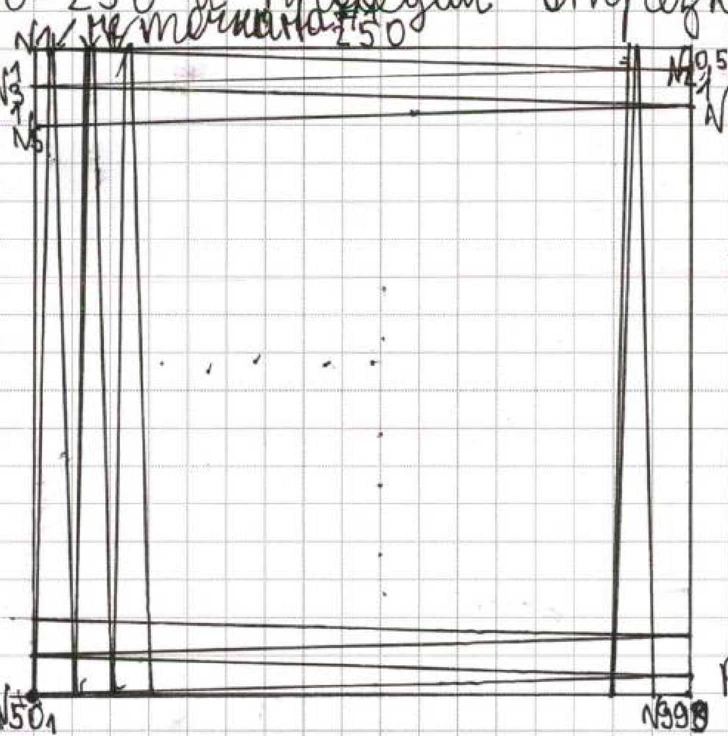
Ответ: 21 ученик.

Очень путано написано, но решение есть.

③ $a^2+b^2+c^2=a+b+c \Rightarrow a^2+b^2+c^2-a-b-c=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)=$
$=0$, а также $a(a-1)=b+c-b^2-c^2\le b+c$, ведь b^2 и $c^2\ge 0. \Rightarrow$ (1)
$\Rightarrow 1+a(a-1)\le b+c+1\le a+b+c+1$, ведь $a\ge 0$. Значит так как
$(a-1)^2+a=\cancel{1+a(a-1)}=(a-1)^2+(a-1)+1=(a-1)a+1\le b+c+1\le a+b+c+1\Rightarrow$
$\Rightarrow (a-1)^2+a\le a+b+c+1\Rightarrow (a-1)^2\le b+c+1\Rightarrow$ так как $(a-1)^2\ge 0$, а
$b+c+1\ge 1$, то $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\le\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$, ведь также $a\ge 0$. Значит оценив
и другие две дроби получаем $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}+$
$+\frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}+\frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1}=\frac{(a-1)a+(b-1)b+(c-1)c+1+1+1}{a+b+c+1}=\frac{0+1+1+1}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}$
из-за неравенства (1.)

ч.т.д.

① Приведём пример для 249. Возьмём квадрат 250×250 и проведём отрезки таким образом:



250

Длинна 998 отрезков равна по $\sqrt{(0,5)^2+250^2}$ по теореме Пифагора. И расстояние между точкой №1 и точкой №… $=\sqrt{249^2+250^2} < \sqrt{4\cdot 250^2} \leq 2\sqrt{250^2} < 2\sqrt{250^2+0,5^2}$ ⇒ + эти точки можно соединить двумя звеньями длинной $\sqrt{250^2+0,5^2}$, ведь $\sqrt{250^2+0,5} < \sqrt{250^2+0,5} + \sqrt{250^2+249^2}$ и $\sqrt{250^2+249^2} < 2\sqrt{250^2+0,5^2}$ ⇒ неравенство сторон тр. не нарушено. А также этот пример не противоречит условию

и правда...

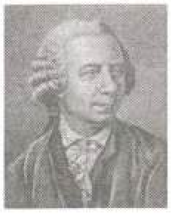
~~Докажем, что каждое звено~~ ~~соединено~~ перпендикулярно хотя-бы с 249 другими.

Действительно, если обозначить звено соед. звенья №1 и №2 через #1, №2 и №3 через #2, …, №1000 и №1 через #1000, то все ~~16~~ неч. звенья от #1 до #500 ~~пересе~~ перпендикулярны неч. звеньям от #501 до #998, а все чет. пересек. все чет.

500 : 2 = 250 – чет. и неч. пересеч.

498 : 2 = 249 – чет. и неч пересеч.

Тогда возникает вопрос, ведь #999 и #1000 не перпендик. никому...



8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 18

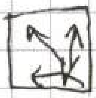
аудитория – посадочное место

41306306

номер участника

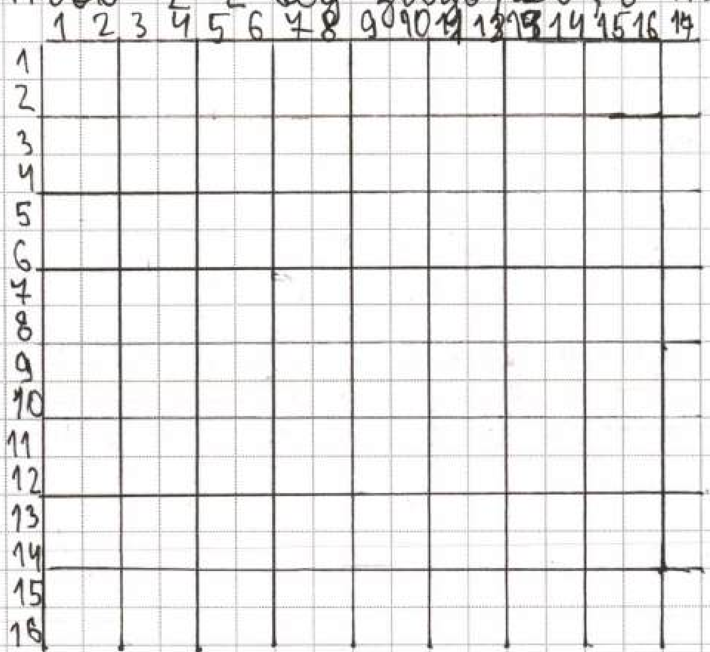
5	6	7	8	Σ
+ мг	+ КН	−. А.П.	Ø КА	
V 7 ВС	7 МС	0 МС	Ø МК	14

⑤ Поймём, что ~~для~~ в любом квадрате 2×2 не может быть более одного короля, ведь один из королей в какой бы угол мы его не положили, будет бить все ост. клетки в нем $\Rightarrow$ мы не можем больше в этот квадрат ставить королей:

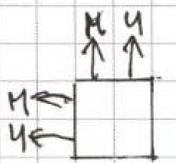


К – король
→ – клетки, которые он бьёт

Тогда разобьём доску на 225 (15×15) квадратов 2×2 без зазоров; а также пронумеруем клетки доски



Тогда очевидно что квадрат входит в разбиение если координаты его клеток такие:

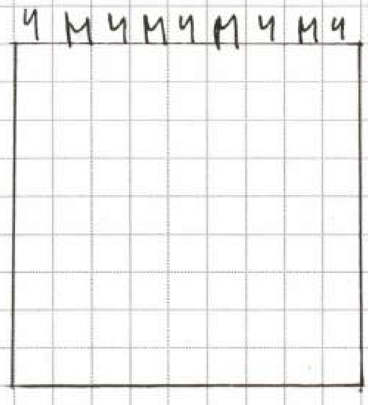


н – неч.

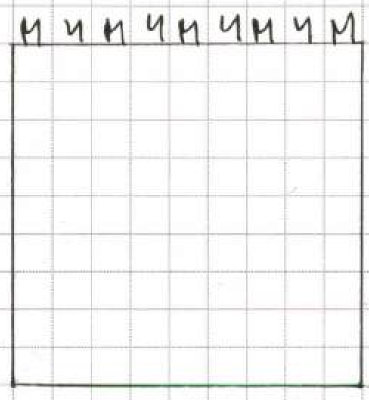
ч – чет.

В любом кв. 9×9 коорд. по гориз. будут такими:

⑤ ~~Или такими:~~



или



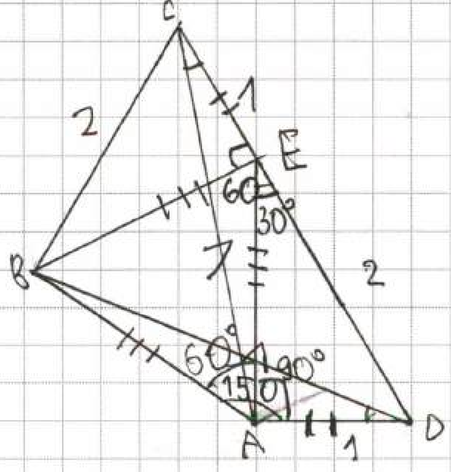
В обоих случаях можно взять 4 ~~то~~ пар м-ч:

м ч м ч м ч м ч м   ч м ч м ч м ч м ч

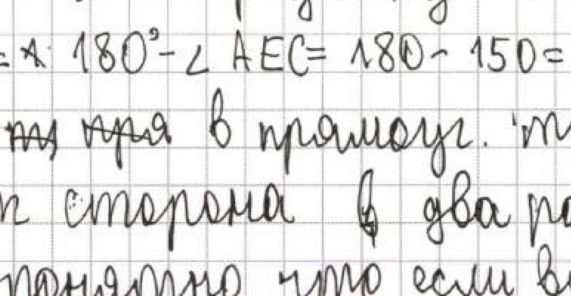
Тоже самое по вертик. ⇒ в любом кв. 9×9 найдутся $4\times4=16$ кв. из разбиения. Также ~~если~~ максимум в 5 кв. 2×2 из разбиения может не быть короля, ⇒ ⇒, иначе всего ~~королей~~ кв. 2×2 из разбиения, в которых есть ~~король~~ ведь $\le 225-6=219$, ~~что меньше 220~~ ~~значит и в любом~~ ⇒ королей всего $\le 219\cdot1$ (ведь в этих кв. 2×2 максимум по 1 королю) $=219<$ <220 — противоречие. Значит ~~в~~ в любом кв. 9×9 внутри этой доски максимум 5 пустых кв. 2×2 из разбиения ⇒ минимум $16-5=11$ заполн. кв. 2×2 из разбиения с королями ⇒ минимум 11 королей.

ч.т.д.

6



Отметим точку E на CD, такую, что $CE=AD=1$. По условию $BD=AC$ и $\angle BDA=\angle ACD$ ($\angle ACE$) $\Rightarrow$ так как $AD=EC$ $\triangle ACE=\triangle BAD$ по 1 признаку $\Rightarrow \angle AEC=\angle DAB=150^\circ$ (ведь $BD=AC$) $\Rightarrow \angle AED = 180^\circ-\angle AEC = 180-150=30^\circ$. Поймём, что только ~~ты~~ ~~при~~ в прямоуг. тр. напротив угла в 30° лежит сторона в два раза меньшая другой, ~~пусть~~ понятно, что если взять прямоуг. тр. ~~со стор~~ катетом 1 и углом в 30° напротив него, то гипотенуза $=1\cdot 2=2$, тогда пусть есть другой такой тр. (не прямоуг.), наложим его на наш. тр. так, что углы по 30° и стороны по 2 совпадут:



Тогда сторона напротив $\angle 30^\circ >1$, ведь гипотенуза второго больше катета! Противоречие

⑥ Значит $\angle EAD=90^\circ \Rightarrow \angle BAE=\cancel{45}\ \angle BAD-\angle EAD=150-\overset{9}{\cancel{8}}0=\cancel{9}60^\circ$

$\Rightarrow$ так как также $AB=AE$ (из равенства $\triangle CEA=\triangle ABD$)

$\triangle ABE$ равносторонний $\Rightarrow AE=BE$ и $\angle CEB=180-AED-BEA=$

$=180-30-60=90^\circ=\angle EAD$, а также $CE=AD \Rightarrow \triangle CBE=\triangle AED$

по 1 признаку $\Rightarrow BC=ED=2$ (ведь $\angle EAD=\angle BEC$)

Ответ: $BC=2$.

(7) ~~Пусть $a=7$, $b=11$, $c=13$~~

~~$(7\cdot 11+7+1)(11\cdot 13+11+1)(13\cdot 7+13+1)$~~

Рассмотрим ~~3~~ 4 случая:

1) a, b, c – неч.

2) a, b – неч, c – чёт. (без. огр. общ.)

3) a – неч; b, c – чёт. (без огр. общ.)

4) a, b, c – чёт.

1) если a, b, c – неч, то $(ab+a+1)$ и другие две скобки н+н+1 – нечетные ⇒ произв. неч., но $abc+1$ – н+1 – ~~неч~~ четное ⇒ произв ⋮̸ $abc+1$, противореч.

2) если a, b – неч., c – чёт, то ~~$(ca+c+1)$ – неч.~~ $a+b+c+1$ – н+н+ч+1 = н, но ~~$ab+a+1$ – н+н+~~ $bc+b+1$ – ч+н+1 – чет. ⇒ p^2 – чет. (p – предположительно прост. число из усл.) ⇒ $p=2$, вернёмся к случаю потом)

~~4~~3) Если a, b, c – чёт, ...