Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 33

Ответ: 4

Пример: $45 = \underbrace{22+23}_{2} = \underbrace{14+15+16}_{3} = \underbrace{7+8+9+10+11}_{5} = \underbrace{5+6+7+8+9+10}_{6}$

$n=45$

$k=2,3,5,6$ хорошее

Оценка:

Представим, что можно 5 пятёрок. n может быть хорошее - $2,3,4,5,6$ хорошее $\Rightarrow$ максимум 5 пятёрок $\Rightarrow$ мы получим их все $\Rightarrow$ $n = x + x+1 = y+y+1+y+2 = z+z+1+z+2+z+3 = k+k+1+k+2+k+3+k+4 = a+a+1+a+2+a+3+a+4+a+5$.

Получается, что для каких-то натуральных x и z

$x+x+1 = z+z+1+z+2+z+3$

$\Downarrow$

$2x+1 = 4z+6$

$2x+1 \not\vdots\, 2$, а $4z+6 \,\vdots\, 2$ $\Rightarrow$ 5 пятёрок получить невозможно

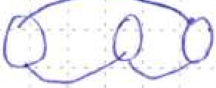
+ КА 7 ЯМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 33

7 + КА5

Каждый ученик ходит в x кружков.
Если все ходят в 1 или в 0 кружков, тогда любых двух кружков ~~не~~ найдется ни 1 человека в двух кружках. Если $x=2$, ~~то~~ ~~кружки~~ ~~соединим~~ проведем ребро между двумя кружками если в них обоих учится 1 ученик, (Если в них обоих учатся ~~в~~ k учеников, то проведем k рёбер.) Заметим, что всего получилось $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3$ рёбер т.к. ~~во~~ между любыми 2-мя кружками $\left(\frac{7\cdot 6}{2}\right)$ ~~во~~ есть ровно по 3 ребра. $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3 = 63$.
Если ученик учится в двух кружках, то он добавляет ровно 1 ребро. $\Rightarrow$ всего учеников $\frac{63}{1}=63$; но $63>60 \Rightarrow$ $x\neq 2$. Если $x=3$, то 1 ученик добавляет три ребра

( - между 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1 если он ходит в 1, 2, 3 кружки)

$\frac{63}{3}=21$ ~~6<21<60~~ $6<21<60 \Rightarrow$ 21 возможно. Если $x=4$ то 1 ученик добавляет $\frac{4\cdot 3}{2}$ рёбер - 6 рёбер, $\frac{63}{6}$ - нецелое число?! $\Rightarrow x\neq 4$ Если $x=5$ то 1 ученик добавляет $\frac{5\cdot 4}{2}=$ $=10$ рёбер $\frac{63}{10}$ - нецелое число?! $\Rightarrow x\neq 5$ Если $x=6$, то 1 ученик добавляет $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ $\frac{63}{15}$ - нецелое число?! $\Rightarrow x\neq 6$
Если $x=7$, то 1 ученик добавляет $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ рёбер $\frac{63}{21}=3$ ученика, но $3<6$?! $\Rightarrow x\neq 7$
Получается, что x может быть равен только трём $\Rightarrow$ в классе 21 человек.
Пример: 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356 - каждый по 3 раза, то есть есть 3 человека ходящие в 1, 2 и 3 кружки, есть 3 человека ходящие в 1, 4 и 5 кружки... Получается, что для любых двух кружков есть ровно 3 человека которые в них обоих ходят.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 2 Номер участника: 33

+ТА

7 им.

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c} \quad \Big|\cdot 1+a+b+c$$

$$(1+a+b+c)\left(\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\right)\le 3$$

Докажем, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}(1+a+b+c)\le 1$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}(1+a+b+c)\le(1+a)(a-1)^2=(1+a)(1-a)^2$$

т.к. $1+a\ge\frac{(1+a+b+c)}{b+c+1}$ — можно было и пояснить

1) Если $a\le1$, то $(1+a)(1-a)^2\le((1+a)(1-a))\cdot(1-a)\le(1+a)(1-a)\le$
$\le 1-a^2\le 1$.

2) Если $a>1$, то $a=1+x$, где $x>0$

т.к. $a^2+b^2+c^2=a+b+c\Rightarrow (1+x)^2+b^2+c^2=1+x+b+c\Rightarrow$
$\Rightarrow (1+x)x=b-b^2+c-c^2=b(1-b)+c(1-c)$

$b(1-b)\le\frac{1}{4}$ т.к. $b(1-b)=(0{,}5+k)(0{,}5-k)=$
$=\frac{1}{4}-k^2\le\frac{1}{4}$.

аналогично $c(1-c)\le\frac{1}{4}$

$(1+x)x=b(1-b)+c(1-c)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow (1+x)x\le\frac{1}{2}\Rightarrow x<\frac{1}{2}$.

Если $a>1$, то $a=1+x$, где $x>0$ и $x<\frac{1}{2}$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}(1+a+b+c)\le(1+a)(a-1)^2=(2+x)x^2\le\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\le 1$$

8/5

Задача №_3_ Лист_2_ из _2_ Номер участника:_33_

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1}(1+a+b+c) \leq 1$, аналогично $\frac{(b-1)^2}{\cancel{b+}a+c+1} \cdot (1+a+b+c) \leq 1$, аналогично

$\frac{(c-1)^2}{b+a+1} \cdot (1+a+b+c) \leq 1 \Rightarrow \cancel{3} \frac{(a-1)^2}{b+c+1}(1+a+b+c) + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} \cdot (1+a+b+c)$

$+ \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \cdot (1+a+b+c) \leq 3 \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{3}{1+a+b+c}$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

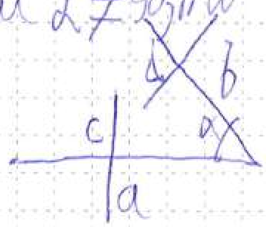
Задача № 4 Лист 1 из 3 Номер участника: 33

Оценка на ~~249~~ ~~252~~ 250:

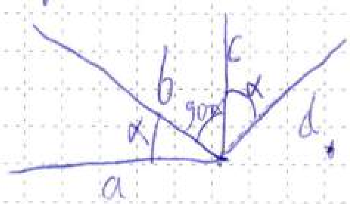
Докажем, что существует хотябы 4 различных отрезка (с разным направлением)

Посмотрим на ~~первые~~ любые два звена. Между ними угол α. Если существует два последовательных звена между которыми угол не 90°, то возьмем их, а если их нет то возьмём два звена, где $\alpha = 90^\circ$.

Если $\alpha \neq 90$, то назовем эти звенья a и b



Заметим, что через a проходит какое-то c такое, что $c \perp a$ (иначе $k=0$, а $0<251$) а через b аналогично проходит $d \perp b$. Получается 4 отрезка с разным направлением.



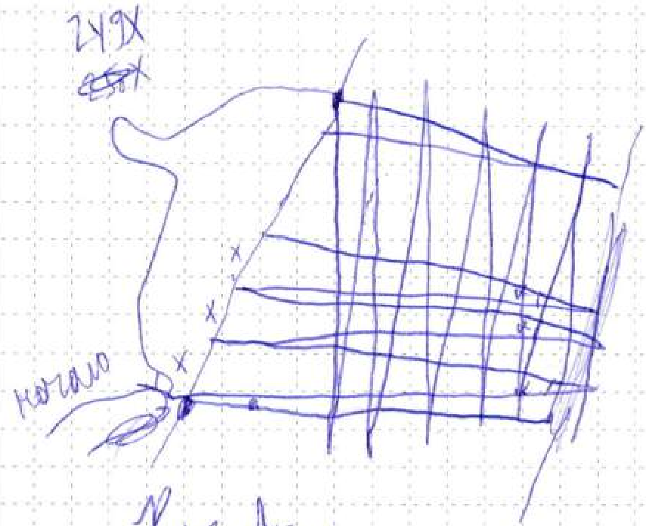
Получается, что отрезков параллельных a, b, c или d $\leq 1000 \Rightarrow$ НУО отрезков $\parallel a \leq 250. \Rightarrow$ Для любого отрезка параллельного c не больше 250 перпендикулярных ему отрезков длины a

Если нет двух звеньев угол между которыми не 90, то звенья вообще не пересекаются т.к они все равны. $\Rightarrow k=0$.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 2 из 3 Номер участника: 33

Пример на 249:



а где конец?

Назовём отрезки a,b,c,d они идут в таком порядке

a, b, a, b ... c, d ~ c b.

249 ~~250~~ пар a, b

250 ~~249~~ пар c, d

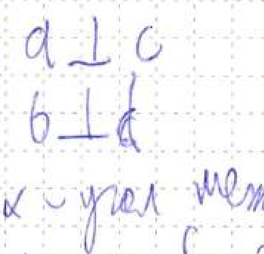
$a \perp c$

$b \perp d$

α – угол между a и b очень маленький так, чтобы все отрезки пересекались со всеми (

примерно так выглядит)

(249X = c) ⇒ a = b = d



Задача № 4 Лист 3 из 3 Номер участника: 33

Оценка на 249:

~~Если больше~~ $k \le 250$ из-за оценки на 250 $\Rightarrow k = 250$

если оценка не работает если $k = 250$, то всего есть ровно разнонаправленных отрезка ($a \uparrow\downarrow c$, $b \uparrow\downarrow d$)

И их ровно по 250.

Заметим, что 2 соседних звена не могут быть перпендикулярны, иначе 1 из этих звеньев будет иметь всего ≤ 249 перпендикулярных ему, так как соседний отрезок не считается.

Если мы вернулись в начальную точку, то заметим что мы прошли 250 a в 1 сторону и 250 a в другую сторону, аналогично с b, c, d.

... и что?

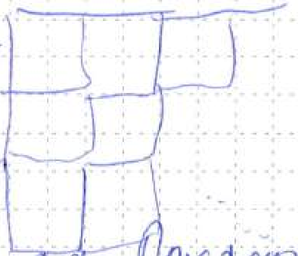
Оценка ✓

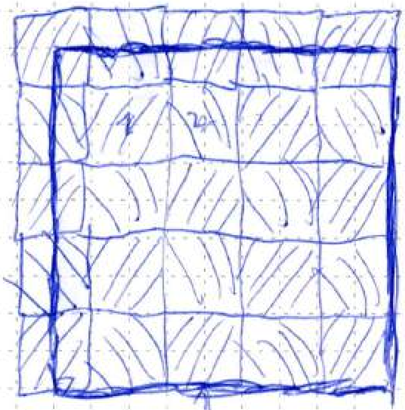
∓ и н

2ка

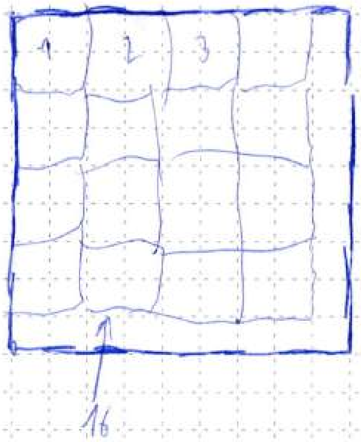
Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 33

Разобьём доску на квадраты 2·2. В каждом квадрате максимум 1 король. Посмотрим сколько таких квадратов в квадрате 9·9. Докажем, что их ≥16. Посмотрим на левый верхний угол квадрата 9·9. Есть 4 варианта как он занят. Из его расположения можно понять расположение остальных квадратов.

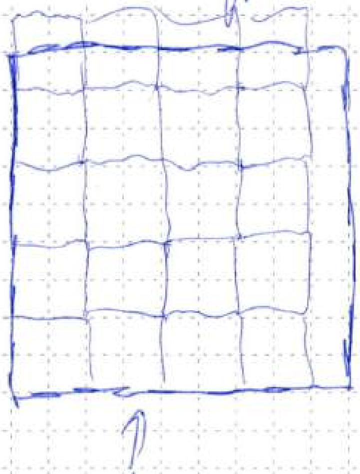




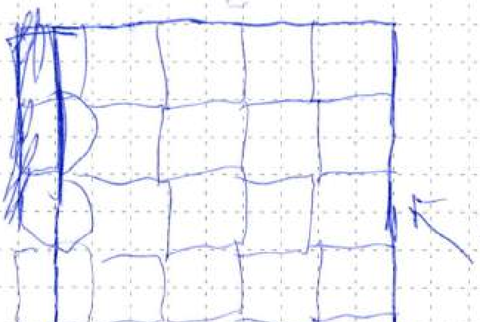
16



16



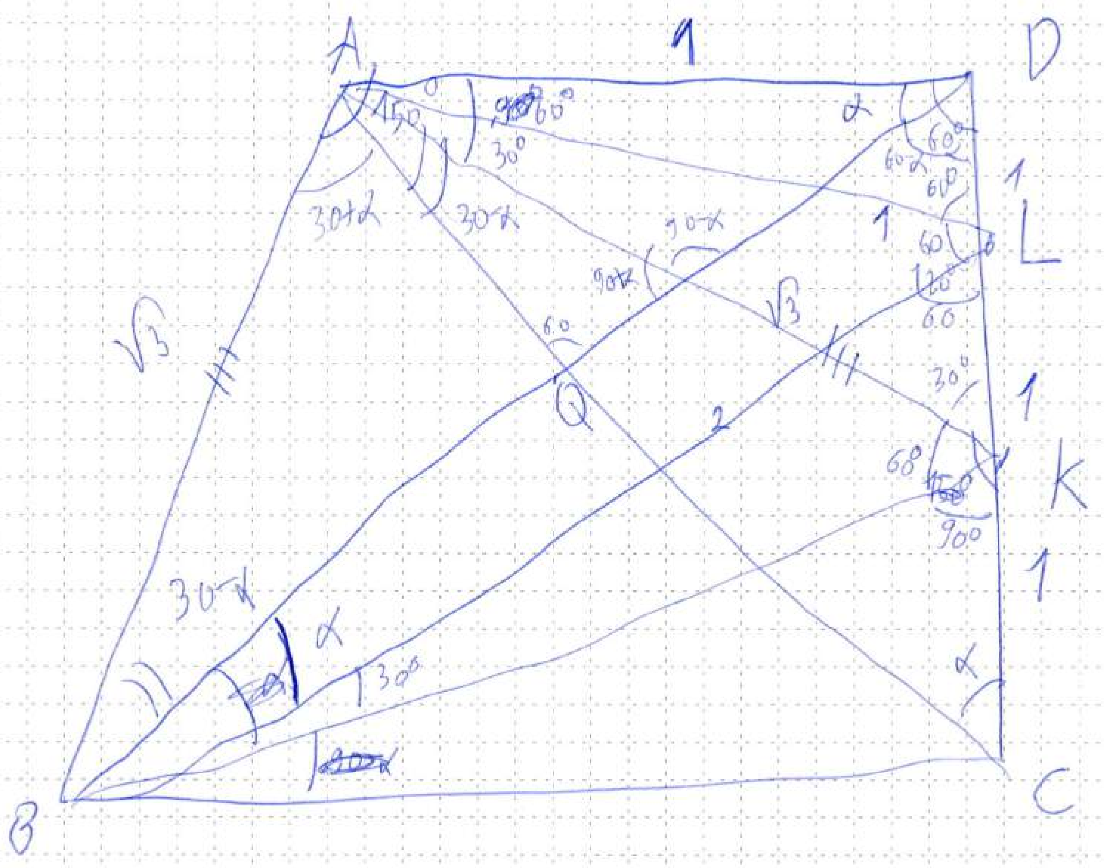
16



16

Представим, что в каком-то квадрате 9·9 <11 королей ⇒ ≤10 ⇒ ≥6 квадратов пустые ⇒ всего квадратов $15 \cdot 15 = 225 - 6$ пустых $= 219$, а королей стоит 220 ⇒ в 1 квадрате 2 короля?!

Задача № 6 Лист 1 из 2 Номер участника: 33



+ 7 чк

$AC = BD$, $\angle ADB = \angle ACD$, $CD = 3$, $AD = 1$

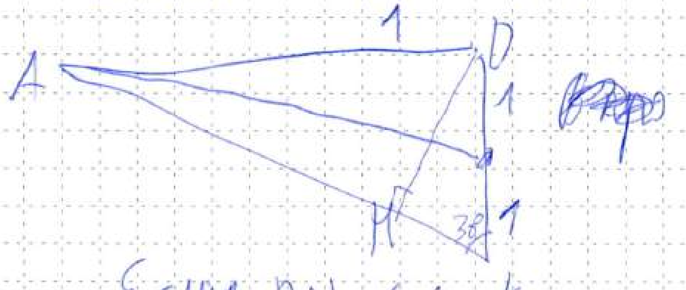
$\angle BAD = 150^\circ$

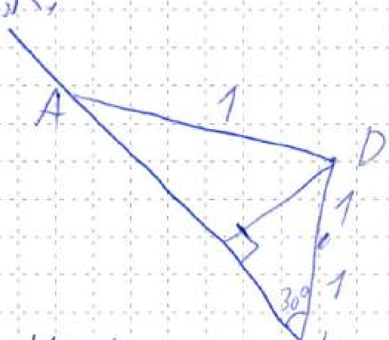
$\triangle ABD = \triangle KAC$ ($AD = KC$, $AC = BD$, $\angle ADB = \angle KCA$)

$\Downarrow$

$\angle AKC = 150^\circ$, $AB = AK$, $\angle KAC = \angle ABD$,

$\angle AKD = 30^\circ$, $\angle DAK = 90^\circ$ т.к.





Если $DAK \neq 90^\circ$ то есть H на AK, что $\angle DHK = 90^\circ \Rightarrow$ $2HD = DK$ и $HD = 1 \Rightarrow AD = DH \Rightarrow$ $\angle DAH = 90^\circ \Rightarrow A = H$.

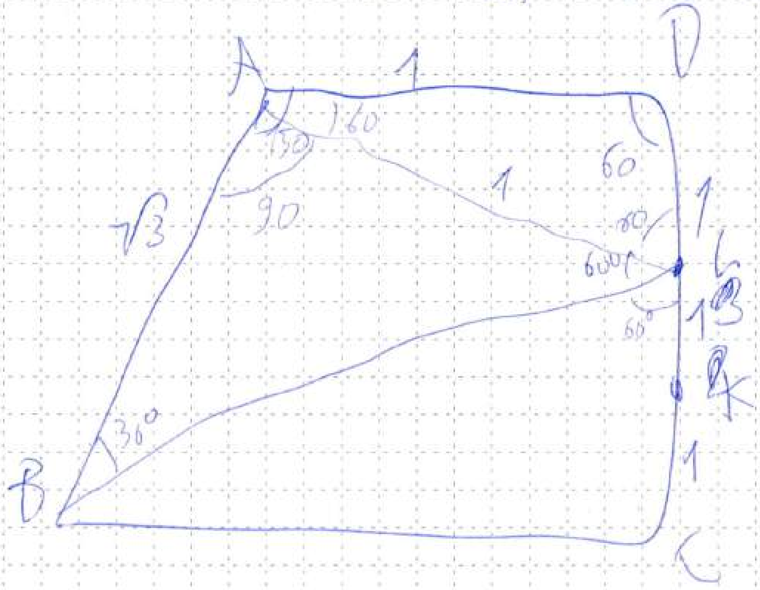
Задача № 6 Лист 2 из 2 Номер участника: 33

$\Rightarrow \angle KAD=90^\circ \Rightarrow \angle ADK=60^\circ \Rightarrow AL=AD=DL=1 \Rightarrow \angle KAL=30^\circ$,

а $\angle LAD=60^\circ$

$\angle ADB=\alpha \Rightarrow \angle CAK=30-\alpha \Rightarrow \angle AQD=60^\circ$,

т.к. $AD=1$, $DK=2$, то $AK=\sqrt{3}=AB$.



$\angle BAC=90^\circ$

$AB=\sqrt{3}$ $AC=1 \Rightarrow \angle ABC=30^\circ$, $\angle ACB=60^\circ$

т.к. $AB=AK$ $\angle AKB=\angle ABK=60^\circ \Rightarrow \angle LBK=30^\circ \Rightarrow$

$\angle BKC=90^\circ \Rightarrow LB=2$ т.к напротив

угла 90° в $\Delta LBK \Rightarrow LB=LC=2 \Rightarrow \angle LBC=\angle LCB=$

$\dfrac{180-\angle BLC}{2}=\dfrac{180-60}{2}=60^\circ \Rightarrow \Delta BLC$ равносторонний

$\Rightarrow \underline{BC=2}$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 33 1 См

ТА

Если $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots abc+1$, то

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)\cdot abc \vdots abc+1$, то

$c(ab+a+1)\cdot a(bc+b+1)\cdot b(ca+c+1) \vdots abc+1$, то

$(ca+c-1)\cdot(ba+a-1)(cb+b-1) \vdots abc+1$.

$\Downarrow$

$(ab+a-1)(bc+b-1)(ca+c-1) \vdots abc+1$

~~Докажем~~

Если $(ab+a+1)$ или $(bc+b+1)$ или $(ca+c+1) \vdots 2$, то (НУО $ab+a+1 \vdots 2$)

$ab \vdots 2, a \not\vdots 2, 1 \not\vdots 2 \Rightarrow$ ~~ab~~ $b \vdots 2, a \not\vdots 2$.

Если $b \vdots 2$, то $abc+1 \not\vdots 2 \Rightarrow$ простое число это $2 \Rightarrow$ V

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = 4(abc+1)$, но

~~ab~~

$(ab^2c+abc+ba)(ca+c+1)$ ($+a+b+ab$; VI)

$2abc+(ba)(ca+c+1)$ ($+3$; VI ?)

$2abc+2abc+3+3c$ (VI)

$4abc+5 \geq 4(abc+1)$?! $\Rightarrow (ab+a+1),(bc+b+1);(ca+c+1) \not\vdots 2$

>

$\Downarrow$

~~если~~ если $ab+a+1 \vdots x_1$ $(abc+1 \vdots x_1)$,

то $ab+a-1$ ~~abc~~ $\not\vdots x_1$

Аналогично

$abca(ab+a-1)(bc+b-1)(ca+c-1) \vdots abc+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab+a-1)\cancel{b}c\,(bc+b-1)a\,(ca+c-1)b \vdots abc+1 \Rightarrow (ab-a-1)(bc-b-1)(ca-c-1) \vdots abc+1$

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots abc+1$

$(ab+a-1)(bc+b-1)(ca+c-1) \vdots abc+1$

$(ab-a-1)(bc-b-1)(ca-c-1) \vdots abc+1$

Если $(ab+a+1) \vdots x_1$ и $(abc+1 \vdots x_1)$, то $ab+a-1 \not\vdots x_1$

иначе $(ab+a+1)-(ab+a-1) \vdots x_1 \Rightarrow x_1=2$, но $ab+a+1 \not\vdots 2$

, а также $ab-a-1 \not\vdots x_1$, иначе $(ab+a+1)-(ab-a-1) \vdots x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a+2 \vdots x_1 \Rightarrow a+1 \vdots x_1 \Rightarrow (ab+a+1) \cdot c - (abc+1) \vdots x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow ac+c-1 \vdots x_1 \Rightarrow (a+1)c-1 \vdots x_1 = ? -1 \vdots x_1 \Rightarrow x_1=1$

~~Аналогично~~ Если $ab+a-1 \vdots x_1$, $ab-a-1 \vdots x_1$, то $abc+1 \not\vdots x_1$,

иначе ~~$2a \vdots$~~ $ab+a-1 - (ab-a-1) \vdots x_1 \Rightarrow 2a \vdots x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \vdots x_1 \Rightarrow abc+1 \not\vdots x_1$?! Аналогично для

$(bc+b+1)$ и $(ca+c+1)$.

Если $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)p^2$, то

~~1 из ско~~ $abc+1 \vdots$ на 1 из 3 скобок (из 3 и p — всего две) НУО $abc+1 \vdots ca+c+1$. Если 1 из скобок $\vdots p^2$, то $abc+1 \vdots$ ~~$(bc+b+1)$~~ $(\ )(\ )$, но $abc+1 < (\ )(\ )$?! $\Rightarrow$ 2 скобки $\vdots p^1$, а третья не делится на p.

$\Rightarrow ab+a+1 = pQ$

$bc+b+1 = pz$

$(ca+c+1)zQ = abc+1$

Задача № 8 Лист 1 из 2 Номер участника: 33

1 к А б

Ответ: нет.

~~Посмотрим на 2~~

Упорядочим гири $x_1 \le x_2 \dots < x_{50}$

$x_1 \; x_2 \dots \dots \; x_{50}$

Возьмём C_{24}^{22} расстановок по 24 и посмотрим как он добьётся такого-же суммарного веса.

Где мы берем x_{50}, x_{49} и 22 из $\underbrace{x_{48}, x_{47} \dots}_{24}$

Их C_{24}^{22}. Заметим, что ему не хватит 24 гирь, чтобы достичь такого же суммарного веса т.к. $x_{50} + x_{49} > x_{25} \dots x_{47}$ (в другую кучу идут x_{49} и $x_{25} \dots x_{47}$ ≤ 23 вес) две гири из 24. + 23

и $\underbrace{x_{48} \dots x_{25}}_{\substack{22 \text{ гири} \\ (\text{без } 2\text{-х})}} > x_1 \dots x_{24}$

Значит ему понадобится 25 или 26 гирь.

Заметим, что если он ≥2 раза взял 26 гирь, то

$x_1 + \dots x_{24} + x_i + x_j = x_{25} \dots x_{50} - x_i - x_j$

и $x_1 \dots x_{24} + x_k + x_n = x_{25} \dots x_{50} - x_k - x_n$

$\Downarrow$

Вычтем из друг друга и получим, что

$x_i + x_j - x_k - x_n = x_k + x_n - x_i - x_j$

$x_i + x_j = x_k + x_n \Rightarrow$ всего таких пар максимум 12.

т.к. если их ≥13, то найдется x_i встречающееся два раза $\Rightarrow x_i + x_a = x_i + x_2 \Rightarrow x_a = x_2$?! $\Rightarrow$ их максимум 12

Посмотрим, сколько может быть вариантов где ему

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 8 Лист 2 из 2 Номер участника: 303

Понадобится 25 гирь. ~~Ито~~ Если он взял 25 гирь, то осталась 1 гиря. Заметим, что если x_i где $i \le 24$ осталась двойка, то

$x_1 \ldots x_{24} - x_i + x_k + x_m = x_{25} \ldots x_{50} - x_k - x_m$

$x_1 \ldots x_{24} - x_i + x_Q + x_Z = x_{25} \ldots x_{50} - x_Q - x_Z$

Вычтем — получится

$x_k + x_m = x_Q + x_Z \Rightarrow$ таких вариантов ≤ 12.

Всего их $\le 12 + 12 \cdot 24 \Rightarrow \le 12 \cdot 25$

26 гирь

Если хотябы ~~когда~~ из 1 из равенств неверно

$x_{48} + x_{25} \ne x_{47} + x_{26}$ или другое, то -13 вариантов. А всего мы взяли $12 \cdot 23 + 13 = 12 \cdot 24 + 1 \Rightarrow$ все x_i и x_{i+1} а также x_j и x_{j+1} отл. на какойто K, тогда можно изначально взять еще варианты ведь если числа отл. на 1 то это возможно

Как?