Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Курбанисцев Дмитрий

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

По условию $1 < k < 7 \Rightarrow k \in \{2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть n является 2-хорошим и 4-хорошим, тогда $n = a + (a+1) = 2a + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \not\vdots\, 2$, но тем же $n = b + (b+1) + (b+2) +$
$+ (b+3) = 4b + 6 \Rightarrow n \,\vdots\, 2$. Противоречие $\Rightarrow$
n не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим $\Rightarrow$ Вася может получить
$\leq 5 - 1 = 4$ пятерок. $45 = 22 + 23 = 7 + 8 + 9 +$
$+ 10 + 11 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 14 + 15 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ если Вася напишет $n = 45$, он получит по пятерке за каждое $k \in \{2, 3, 5, 6\}$, т.е. 4

Ответ: 4

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: [illegible] Дмитрий

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$a, b, c \geqslant 0$; $a^2, b^2, c^2 \geqslant 0 \Rightarrow b^2 + c^2 + a \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a \geqslant a^2 \Rightarrow 2a + b + c \geqslant a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + b + c + 1 \geqslant a^2 + 1 \Rightarrow b + c + 1 \geqslant a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow b + c + 1 \geqslant (a-1)^2 \Rightarrow$ во всех дробях числитель $\leq$ знаменателя. $\frac{x}{y} \vee \frac{x+k}{y+k} \Leftrightarrow xy + xk \vee xy + yk$, (где $k \geqslant 0$) $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow xk \vee yk$, если $x \leq y$, то $xk \leq yk$, т.е. $\frac{x}{y} \leq \frac{x+k}{y+k}$. Тогда:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{a^2 - a + 1}{a+b+c+1} + \frac{b^2 - b + 1}{a+b+c+1} + \frac{c^2 - c + 1}{a+b+c+1} = \frac{\overbrace{a^2 + b^2 + c^2 - a - b - c}^{\text{равны по условию}} + 3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1},$$

что и нужно было док-ть

Задача № 4 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Карабинцев Дмитрий

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Оценка: ~~Посмотрим на первое звено:~~

~~I II~~ ~~Пусть оно пересекает под прямым углом ≥ 251 звено и $k = 251$~~

~~Пусть $k = 251$, тогда I пересекает $= 251$ под прямым углом звено, которые тогда между~~

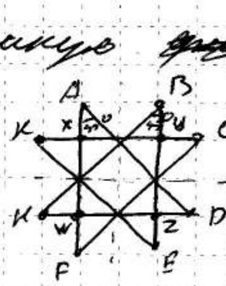
Заметим, что все рёбра разбиваются на группы параллельных звеньев. ~~...~~

Все такие группы разбиты на пары (т.к. k одинаково для всех рёбер).

Пусть групп всего 2. Тогда поменяем ПДСК так, чтобы одна группа была $\parallel$ оси OX, а другая — OY. Тогда возьмём отрезок $\parallel$ оси OX и находящийся на нём выше всех. Заметим, что его начало не мог пересечь (т.к. группы всего две) $\Rightarrow$.

Тогда группы ≥ 4, но тогда по принципу Дирихле хотя бы в одной $\leq \frac{1000}{4} = 250$, $\Rightarrow$ в парной группе $k \leq 250 \Rightarrow k$ всегда ≤ 250. ✓

Построим пример для $k = 250$. Назовём звездой такую ~~фигуру~~ замкнутую ломанную:



(Фигура симметрична)

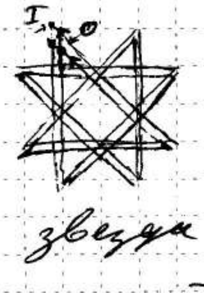
$AX = BY = CY = DZ = EZ = FW = HW = KX = 1 - \sqrt{0,5}$

$XY = YZ = WZ = XW = 2\sqrt{0,5} - 1$.

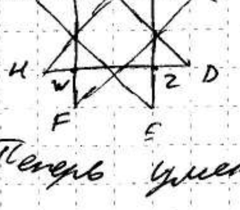
Очевидно, что такая фигура является 8-звенной подходящей под условие ломаной. Сдвинем на некоторое очень малое число звезду вниз и влево.

Задача № 4 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Курбанов Дмитрий

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Заметим, что звезда так же пересечёт все отрезки из парной другой правильной звезды, т.е. каждый будет пересекать $\frac{1}{4}$ от всех под прямым углом. Посмотрим на звезду



Уменьшим AX на a_0 и увеличим WD на a_0. Из Th Пифагора, AD увеличится. Теперь уменьшим HW на a_0, но увеличим BZ на нечто $a_1 < a_0$ (по Th Пифагора). Уменьшим ZE на a_1 и увеличим KY на $a_2 < a_1$, уменьшим CY на a_2 и увеличим AF на нечто $a_3 < a_2$. Тогда AF уменьшилось, AD увеличилось, а остальные не изменились. Понятно, что a_0 может быть сколь угодно малым. Тогда изменяя расстояния, на которые мы сдвигаем вторую звезду мы можем добиться того, чтобы при замене точек A обеих звезд на точки I и O, мы уменьшим AD и увеличим AF второй звезды на 2 независимых числа, т.е. добьёмся равенства всех рёбер. (Очевидно, что a_0 может быть <0, тогда ситуация будет симметрично относительно увеличения/уменьшения). Тогда будем систематически добавлять звезды пока кол-во рёбер не станет равно $1000:8$, тогда кол-во пересечений действительно будет равно 250.

Как соединить 1250 полученных звезд

~~При этом пропадает параллельность~~

и как сделать все звезды?

замены всех рёбер

+ Если оценка