Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 34

Ответ: 4 пятерок

Оценка:

Всего k, которые больше 1, но меньше 7 5. (2, 3, 4, 5, 6)

Докажем, что n не м.б. одновременно 2-хорошим и 4-хорошим.

Если n - 2-хорошее, то $\exists$ такое x_1, что

$n = (x_1+1)+(x_1+2) = 2x_1+3$.

Если n - 4-хорошее, то $\exists$ такое x_2, что

$n = (x_2+1)+(x_2+2)+(x_2+3)+(x_2+4) = 4x_2+10$.

$\Rightarrow$ если n и 2-хорошее и 4-хорошее, то

$2x_1+3 = 4x_2+10$. Но $2x_1+3$ - нечетное, а $4x_2+10$ - четное

?! $\Rightarrow$ n не м.б 2-хорошим и 4-хорошим одновременно $\Rightarrow$ Вася получит ≤ 4 пятерок

Пример:

Рассмотрим $n = 45$

n - 2-хорошее т.к. $45 = 22+23$

n - 3-хорошее т.к. $45 = 14+15+16$

n - 5-хорошее т.к. $45 = 7+8+9+10+11$

n - 6-хорошее т.к. $45 = 5+6+7+8+9+10$

$\Rightarrow$ Вася получит 4 пятерки

+ КА 7 ЗМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 3 Номер участника: 34

Ответ: 21 ученик

Оценка:

Всего пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$.

Пусть k - кол-во кружков, которые посещает ученик класса

Для кажд. пары найдутся 3 ученика, посещающих оба кружка. ⇒ Пар кружков умножить на кол-во учеников, посещающих кажд. пару кружков это $21\cdot 3 = 63$.

Если ученик ходит в k кружков, то количество раз, которое его посчитали это кол-во пар кружков, в которые он ходит. Т.е. $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$.

⇒ всего учеников $\frac{63\cdot 2}{k\cdot(k-1)}$. k не м.б. 0 и 1 очевидно. Если $k=2$, то всего 63 ученика ?! (т.к. $63>60$). Если $k=4$, то учеников $\frac{63\cdot 2}{4\cdot 3}$ т.е. $\frac{21}{2}$?! (т.к. учеников не м.б. нецелое кол-во)

Если ~~ученик~~ $k=5$, то учеников $\frac{63\cdot 2}{5\cdot 4}$ т.е. $\frac{63}{10}$?! (т.к. учеников не м.б. нецелое кол-во)

Если $k\geq 6$, то учеников $\leq \frac{63\cdot 2}{6\cdot 5}$ т.е. $\leq \frac{63\cdot 2}{30}$ т.е. $\leq \frac{63}{15}$?! (т.к. это ~~больше~~ меньше 6)

⇒ $k=3$. ⇒ учеников $\frac{63\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{63}{3} = 21$

Задача № 2 Лист 2 из 3 Номер участника: 34

Пример:

Пронумеруем учеников класса от 1 до 21.

Пронумеруем кружки от 1 до 7.

Распределение учеников по кружкам:

номер ~~участника~~ ученика	номера кружков, в которые он ходит
1	1 2 3
2	2 3 4
3	3 4 5
4	4 5 6
5	5 6 7
6	6 7 1
7	7 1 2
8	1 2 5
9	2 3 6
10	3 4 7
11	4 5 1
12	5 6 2
13	6 7 3
14	7 1 4
15	1 3 5
16	2 4 6
17	3 5 7
18	4 6 1
19	5 7 2
20	6 1 3
21	7 2 4

Задача № 2 Лист 3 из 3 Номер участника: 34

Теперь докажем, что в данном примере для $\forall$ 2 кружков есть ровно 3 ученика, которые посещают их оба (заметим, что в табличке для каждой пары кружков $\exists$ ровно 3 участника, которые ходят в оба кружка)

номера пары кружков	~~учет~~ номера учеников, которые ходят в оба этих кружка
2, 1	1, 7, 8
1, 3	1, 15, 20
1, 4	14, 11, 18
1, 5	8, 11, 15
1, 6	6, 18, 20
1, 7	6, 7, 14
2, 3	1, 2, 9
2, 4	2, 16, 21
2, 5	8, 12, 19
2, 6	9, 12, 16
2, 7	7, 19, 21
3, 4	2, 3, 10
3, 5	3, 15, 17
3, 6	9, 13, 20
3, 7	10, 13, 17
4, 5	3, 4, 11
4, 6	4, 16, 18
4, 7	10, 14, 21
5, 6	4, 5, 12
5, 7	5, [illegible], 17, 19
6, 7	5, 6, 13

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 34

+ТА

7пп

$a^2+b^2+c^2 = a+b+c$

(!) $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c}$

Лемма:

Если есть дробь $\frac{x}{y}$, $x \le y$ и x и y неотрицательны, $y>0$

то для $\forall$ $k \ge 0$ $\frac{x+k}{y+k} \ge \frac{x}{y}$.

т.е. $(x+k)\cdot y \ge x(y+k)$ (можем домножить на $y(y+k)$

т.к. $y>0$, $y+k>0$) т.е. $xy+yk \ge xy+xk$

т.е. $yk \ge xk$. А это верно т.к. $x<y$.

Докажем, что $(a-1)^2 \le b+c+1$.

$\Leftrightarrow$(!) $a^2-2a+1 \le b+c+1 \Leftrightarrow$(!) $a^2-a \le a+b+c$

$\Leftrightarrow$(!) $a^2-a \le a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow$(!) $-a \le b^2+c^2$.

А это верно т.к. a неотрицательно.

$\Rightarrow (a-1)^2 \le b+c+1$. $(a-1)^2$ неотрицательно, а $b+c+1>0$.

$a \ge 0$. $\Rightarrow$ $\frac{(a-1)^2+a}{b+c+1+a} \ge \frac{(a-1)^2}{b+c+1+a}$.

Аналогично $\frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} \ge \frac{(b-1)^2}{c+a+1}$ и $\frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} \ge \frac{(c-1)^2}{a+b+1}$.

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(b-1)^2+(a-1)^2+(c-1)^2+a+b+c}{a+b+c+1}$.

т.е. $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+3}{a+b+c+1}$

т.е. $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c}$ т.к. $a^2+b^2+c^2=a+b+c$.

$\Rightarrow$ мы доказали условие задачи.

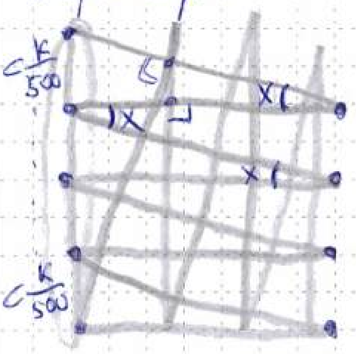
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

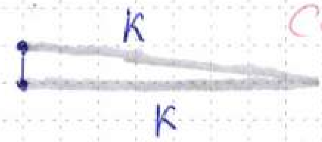
Задача № 4 Лист 1 из 3 Номер участника: 34

Там

Ответ: 250

Пример:





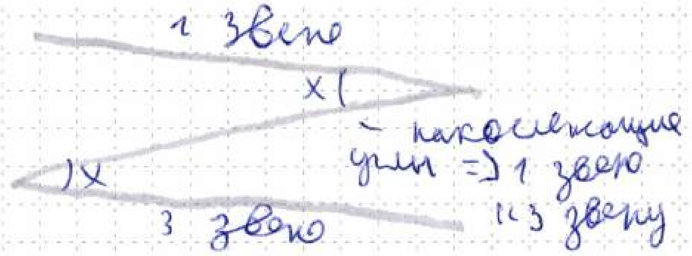
незамкнутая

1

ССС

(k не то, что в условии задан)

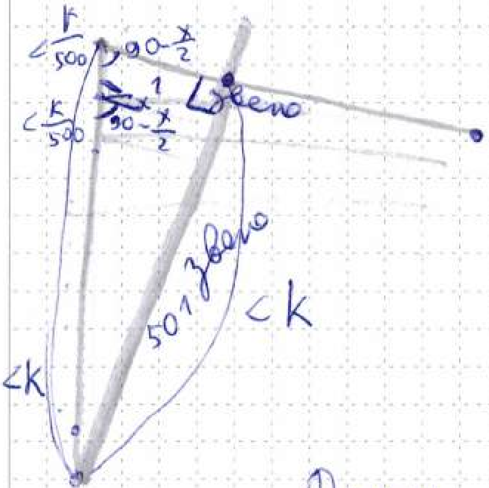
Пусть k - длина всех звеньев. Угол между 1 и 2 звеньями – настолько маленький, что 3 сторона в △ из 1 и 2 звена меньше, чем $\frac{k}{500}$. (очевидно, что можно сделать настолько маленький угол) Пусть угол между 1 и 2 звеном – x°. => угол между 2 и 3, 3 и 4, ..., 499 и 500 звеньями – x°. => 1, 3, ..., 499 звенья параллельны и 2, ..., 500 звенья параллельны (т.к. между 1 и 3, 3 и 5, ..., 497 и 499 звеньями накрест лежащие углы и аналог. между 2 и 4, ..., 498 и 500 звеньями накрест лежащие углы).



Далее 501 звено проведем под таким углом, чтобы оно было ⊥ 1 звену. А далее каждое след. звено будем проводить под углом в x°. => аналог. звеньям 1, ..., 500, звенья 501, 503, ..., 999 параллельны и звенья 502, ..., 1000 параллельны. => звенья 1, 3, ..., 499 ⊥ звеньям 501, ..., 999. и звенья 2, 4, ..., 500 ⊥ звеньям 502, ..., 1000. Докажем, что кажд. из звеньев 501, ..., 1000 будет пересекать звенья 1, ..., 500

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 2 из 3 Номер участника: 34



Третьи отрезки в Δ из 1 и 2 звеньев, 3 и 4 звеньев, ~~...~~ ..., 499 и 500 звеньев (это прямая от 1 точки 1 звена до 1 точки 501 звена) образуют прямую (т.к. угол между 2 такими соседними отр-ками равен $90-\frac{x}{2}+90-\frac{x}{2}+x=180°$)

Длина этой прямой $<k$ т.к. каждый из 500 равных отрезков, на которые можно ее поделить $<\frac{k}{500}$.

$\Rightarrow$ 501-ое звено пересекает 1 звено т.е. и все остальные звенья от 1 до 500 т.к. 501 звено $\perp$ 1 звену $\Rightarrow$ если оно не пересекает 1 звено, то перпендикуляр с первой вершины 501-ого звена на 1 звено не больше, чем k. Но этот перпендикуляр меньше прямой от 1 (.) 1 звена до 1 (.) 501 звена (т.к. в прямоуг. Δ катет < гипотенузы), а эта прямая $<k$. ?! $\Rightarrow$ 501 звено, ~~а значит~~ и пересекает 1, ..., 500 звенья. Аналог. 502, ..., 1000 звенья пересекают 1, ..., 500 звенья.

Почему основание перпендикуляра на отрезке?

Задача № 4 Лист 3 из 3 Номер участника: 34

Оценка: V.

~~Рассмотрим 2 соседних звена, ~~которые~~ угол между которыми не 90, если такие 2 звена есть.~~

Проведем на плоскости произвольную прямую (и будем ~~раз~~ смотривать угол между этой прямой (и ~~[illegible]~~ звеньями. Ориентированный?

Рассмотрим 2 соседних звена, угол между которыми не 90°, если такие 2 звена есть. (пусть звенья i и $i+1$)

Пусть угол между звеном i и прямой ($- a^\circ$.

Пусть угол между звеном $i+1$ и прямой ($- b^\circ$. $\Rightarrow a^\circ \neq b^\circ + 90$ (смотрим на углы по mod. 180)

$\exists$ углы между звеньями и прямой ($a+90$ и $b+90$ (иначе звенья i или $i+1$ перпендикулярны 0 звеньям ?!)

$\Rightarrow$ есть ≥ 4 разных угла между звеньями.

Углы разбив. на пары n и $n+90^\circ$.

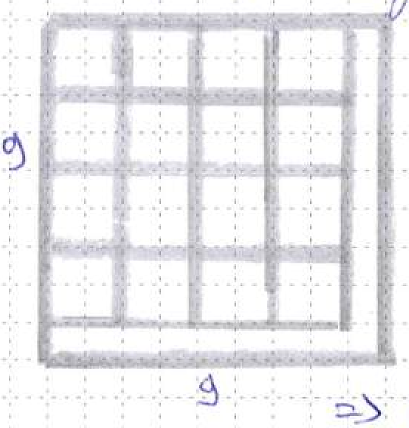
$\Rightarrow \exists$ такое m, что звеньев, котор. пересек. (под углом $m+90$ ≤ 250.

$\Rightarrow$ ~~какое-то~~ $\exists$ звенья с углом m перпенд. ≤ 250 звеньям $\Rightarrow k \leq 250$.

А если все соседние звенья под углом 90, то никакие 2 звена очевидно не пересекаются.

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 34

Разобьем шахматную доску 30×30 на 225 (15^2) квадратов 2×2. Заметим, что в каждом 2×2 не больше 1 короля (если там ≥ 2 короля, то они будут бить друг друга). $\Rightarrow$ в 220 квадратах 2×2 король есть и в 5 квадратах 2×2 короля нету.

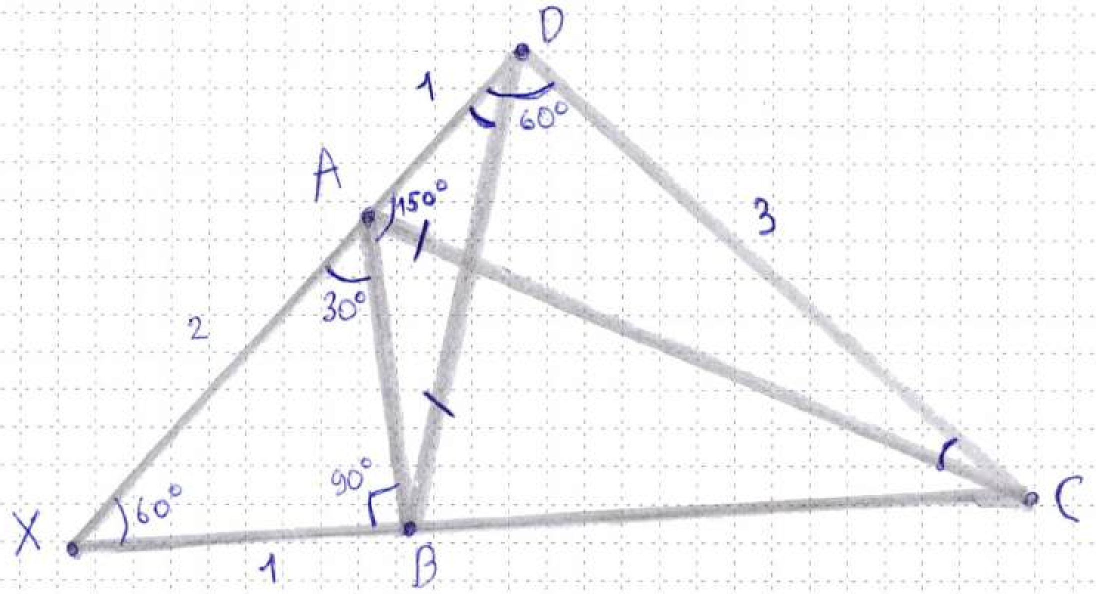


Рассмотрим какой-то квадрат 9×9. ~~Разобьем его на 16 непересекающихся~~ В него полностью входят 16 квадратов 2×2 из нашего разбиения. В ≤ 5 из них нет короля $\Rightarrow$ в $\geq 16-5$ т.е. в ≥ 11 из них есть по 1 королю $\Rightarrow$ в $\forall$ квадрате 9×9 есть не менее 11 королей

7АСп

+. Ek 7

Ответ: 2



Пусть (·) X на отрезке AD за (·) A такая, что $AX=2$. $\Rightarrow XD=AX+AD=2+1=3$.

$\triangle XDB=\triangle DCA$ по 1 признаку так как $\angle XDB=\angle DCA$, $XD=DC=3$, $DB=CA$ (диагонали в 4-угольнике $ABCD$)

$\Rightarrow XB=DA$. $\Rightarrow XB=DA=1$.

$\angle XAB=180^\circ-\angle DAB=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

$\Rightarrow$ т.к. в $\triangle ABX$ $AX=2BX$ и $\angle XAB=30^\circ$, это $\triangle$ с углами $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ то есть $\angle ABX=90^\circ$, $\angle AXB=60^\circ$

$\angle BXD=\angle ADC$ т.к. $\triangle XDB=\triangle DCA \Rightarrow \angle ADC=60^\circ$.

В $\triangle DXC$ $XD=DC=3$, $\angle XDC=60^\circ \Rightarrow \angle DXC=\angle DCX=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$. $\Rightarrow \angle AXB=\angle AXC=60^\circ$. $\Rightarrow$ (·) B лежит на прямой XC. $\triangle XDC$ равносторонний т.к. $XD=DC$ и $\angle XDC=60^\circ$.

$\Rightarrow XC=XD=DC=3$. $XB=1 \Rightarrow BC=XC-XB=3-1=2$

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 34

7ан

+7А

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots abc+1$

Ответ: нет. Предположим противное. Пусть

$$\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} = p^2 \text{ (где } p \text{ - простое)}$$

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = p^2(abc+1)$

Если 1 из чисел $ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1 \vdots p^2$, то произведение 2 других чисел будет не больше, чем $abc+1$. Но произведение $\forall$ 2 из чисел $ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1$ больше, чем $abc+1$.

$\Rightarrow \geq 2$ числа из $ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1 \vdots p$.

Пусть $ab+a+1$ и $bc+b+1 \vdots p$.

$\Rightarrow abc+1 \vdots ca+c+1$

т.к. $ab+a+1$ и $bc+b+1 \vdots p$, $(ab+a+1)\cdot c$ и $(bc+b+1)\cdot a$ $\vdots p$. т.е. $abc+ac+c \vdots p$, $abc+ab+a \vdots p$.

$\Rightarrow (abc+ac+c)-(abc+ab+a) \vdots p$

$\Rightarrow ac+c-ab-a \vdots p$.

т.к. $ab+a+1 \vdots p$, $ac+c-ab-a+(ab+a+1) \vdots p$

т.е. $ac+c+1 \vdots p$

$\Rightarrow abc+1 \vdots p$ т.к. $abc+1 \vdots ac+c+1$.

$\Rightarrow (ab+a+1)\cdot c-(abc+1) \vdots p$. т.е. $abc+ac+c-abc-1 \vdots p$

т.е. $ac+c-1 \vdots p$.

$\Rightarrow$ если $ac+c-1$ и $ac+c+1 \vdots p$, $2 \vdots p \Rightarrow p=2$.

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)\cdot 4$.

$\Rightarrow$ т.к. произведение $\forall$ 2 из чисел $ab+a+1$, $bc+b+1$ и $ca+c+1$ ~~делен~~ больше, чем $abc+1$, $4 > ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1$

$\Rightarrow 3 \geq ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1$. $\Rightarrow a, b, c = 1$.

$\Rightarrow 3^3 = 2\cdot 2^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3$ ~~ПРА~~ ВЫ ?! $\Rightarrow$ частное не м.б. квадратом простого.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Ответ: не может. Предположим противное.

1 к Аб

7 н н

Пусть веса гирь: $a_1 < a_2 < \dots < a_{50}$

Пусть $S_1 = a_1 + \dots + a_{27}$

$S_2 = a_{28} + \dots + a_{50}$

Будем ~~брать~~ рассматривать такие a_i, что $1 < i < 28$.

Будем для всех таких a_i рассматривать набор гирь: $a_{28}, \dots, a_{50}, a_i$.

По условию среди оставшихся гирь можно выбрать несколько гирь с суммой весов $a_{28} + \dots + a_{50} + a_i$ т.е. $S_2 + a_i$. Заметим, что если выбранных гирь из оставшихся ≤ 24, то тогда сумма весов ~~гирь~~ гирь $a_{28} + \dots + a_{50} + a_i$ больше, чем сумма весов выбранных гирь т.к. a_i больше веса самой легкой гири из этих выбранных ≤ 24 гирь, а остальные веса $a_{28}, \dots, a_{50}$ попарно больше остальных весов выбранных гирь. $\Rightarrow$ выбранных гирь 25 или 26.

при $i = 2$ и выборе $a_4, \dots, a_{27}$

Если выбранных гирь 26, то тогда $S_2 + a_i = S_1 - a_i$.

$\Rightarrow 2a_i = S_1 - S_2$. $\Rightarrow$ такое для i не больше, чем одно т.к. иначе ~~как~~ среди a_i-ых найдутся 2 гири с одинаковыми весами.

$\Rightarrow$ для ≥ 25 a_i-ых выбранных гирь будет 25. Будем рассматривать только такие a_i-ые.

$\Rightarrow$ Среди гирь $a_1, \dots, a_{27}$ не выберут гирю веса a_i и еще какую-то гирю. Пусть вес 2 гири $- a_j$. (j от 1 до 27)

$\Rightarrow S_2 + a_i = S_1 - a_i - a_j$ таких ??

$\Rightarrow 2a_i + a_j = S_1 - S_2$.

Задача № 8 Лист 2 из 3 Номер участника: 34

То есть у нас есть 25 пар из a_i-ого и a_j-ого, и во всех таких парах значение $2a_i + a_j$ одно и тоже.

~~Пусть эти пары это x_1 и y_1, x_2 и y_2, …, x_{25} и y_{25} (x в роли a_i, а y в роли a_j)~~

~~Пусть эти пары это a_{i_1} и a_{j_1}, …, $a_{i_{25}}$ и $a_{j_{25}}$ (где $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{25}}$). Рассмотрим a_{i_1}.~~

~~$2a_i$~~

Рассмотрим какие-то a_i и a_j (такие, что a_j где-то есть среди a_i). Пусть a_{i_1} и a_{j_1}. (таких пар ≥ 23 очевидно)

$\Rightarrow$ также есть пара ~~a_{i_2} и a_{j_1}~~ a_{j_1} и a_{j_2}

$\Rightarrow 2a_{i_1} + a_{j_1} = a_{j_1} \cdot 2 + a_{j_2}$

$\Rightarrow 2a_{i_1} = a_{j_1} + a_{j_2}$

$\Rightarrow$ Веса ≥ 23-ех гирь (их индексы ≤ 27), умноженные на 2 представляются в виде суммы 2 других весов гирь (у которых индексы ≤ 27)

~~То есть веса ≥ 23-ех гирь средние арифметические весов каких-то 2 гирь. Но для самых маленьких (и самых больших) гирь среди гирь весов $a_1, \ldots, a_{27}$) такого нет~~

Мы можем провести полностью аналогичное рассуждение, только брать не 27 самых маленьких гирь, а 27 самых больших гирь. Таким образом мы получим, что веса ≥ 23-ех гирь, умноженные на 2 представляются в виде суммы 2 других весов гирь (для гирь с индексами ≥ 23). Но будет гиря, у которых индекс одновременно ≥ 23 и ≤ 27.

почему аналогичное?

Задача № 8 Лист 3 из 3 Номер участника: 34

Тогда вес какой-то гири, умнож. на 2 представляется в виде суммы 2 тяжелых гирь (из 2 рассуждения) и в виде суммы 2 легких гирь (из 1 рассуждения) ?!