Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 75 $+$ 7

Ответ: 4.

Всего возможных $k \leq 5$: 2, 3, 4, 5, 6.

Рассм ~~условие~~ следствие из $n \in \{k\text{-хорошие}\}$

$k=2$

$n = q+q+1 = 2q+1 \Rightarrow n \not\vdots 2$

~~$k=3$~~

~~$n = q+q+1+q+2 = 3q+3 \quad n \vdots 3$~~

$k=4$

$n = q+q+1+q+2+q+3 = 4q+6 \Rightarrow n \vdots 2$

То есть n не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим.

$\Downarrow$

разл. $k \leq 4$.

Пример $n=45$

$n = 22+23$ 2-хорошее

$n = 14+15+16$ 3-хорошее

$n = 7+8+9+10+11$ 5-хорошее

$n = 5+6+7+8+9+10$ 6-хорошее

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 75 5^+_c

7 КАБ

Ответ: 21

Оценка всего людей n и каждый ходит на k кружков, между кружками

Сделаем граф, где вершины это кружки, а ребро

если ∃ ученик, который ходит в оба.

всего ребер: $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3 = 63$

Каждый ученик вносит $\frac{k(k-1)}{2}$ ~~ре~~ ребер. - кол-во

вар. выбрать 2 верш. из k связных с ним

Тогда

$$63 = \frac{k(k-1)}{2}\cdot n$$

$$126 = k(k-1)\cdot n$$

$$\frac{126}{k(k-1)} \in \mathbb{Z} \quad k \geq 2 \quad k \leq 7$$

$k=2$ ✓

$k=3$ ✓

$k=4$ $|126|_{\frac{4}{2}} = 1$?

$k=5$ $|126|_5 = 0$ ×

$k=6$ $|126|_5 = 0$ ×

$k=7$ ✓ $\quad k=7 \Rightarrow n=3 < 6$ ⊗

$k=2 \Rightarrow n=63 > 60$ ⊗

$k=3 \Rightarrow n=21$

Пример кружки от 1 до 7 тройка чисел — набор кружков

куда ходит ученик: (123); (124); (125); (134); (135); (145)

(1,6,7); (1,6,7); (1,6,7) $\quad$ (623); (624); (625); (634); (635); (645)

(723); (724); (725); (734); (735); (745)

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 75

7 TA

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = 1 + \frac{a^2-2a-b-c}{b+c+1} = 1 - \frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}$$ (заменили $a+b+c=a^2+b^2+c^2$)

n^+n

аналогично

$$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} = 1 - \frac{b+a^2+c^2}{a+c+1}$$

$$\frac{(c-1)^2}{b+c+1} = 1 - \frac{c+a^2+b^2}{\cancel{a+b}\ a+b+1}$$

Достаточно:

$$3 \le \frac{3}{a+b+c+1} + \frac{b+a^2+c^2}{a+c+1} + \frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} + \frac{c+a^2+b^2}{a+b+1}$$

$\vee$ / (увеличили знаменатель)

$$\frac{(b+a^2+c^2)+(a+b^2+c^2)+(c+a^2+b^2)+3}{a+b+c+1}$$

$\parallel$

$$3 = \frac{3a+3b+3c+3}{a+b+c+1}$$

чтд

Задача № 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 75

Сделаем граф, в котором звенья - это вершины, а соединяем их ребром если звенья пересекаются под прямым углом.

Тогда в графе нет нечётных циклов

т.к. если A соед. с B, и B соед. с C, то A ~~соед~~ и C

как звенья параллельны, т.е. в цикле $A_1 \ldots A_{2k+1}$

$A_1 \parallel A_3 \parallel A_5 \ldots \parallel A_{2k+1}$, но $A_1 \perp A_{2k+1}$ (?!)

Значит граф двудолен

значит ~~т~~ $k \leq 500$ пусть компонент связности классов эквивалентности

прямых 52 => ровно ?

Тогда если ввести декартовы координаты с осями параллельных классам эк-ти.

то расст. между $\geq$ любыми двумя ~~пар~~ звеньями 1 класса ≥ 5 - ~~ра~~ длина звеньев => любое звено пересекают 50 раз (?!) => классов эк-ти ≥ 3

на каждому классу есть перпенд. => ≥ 4 => есть ~~в~~ звено, которое пересек ≤ 250 раз...

есть оценка

$\mp$ АГ

2 НФС

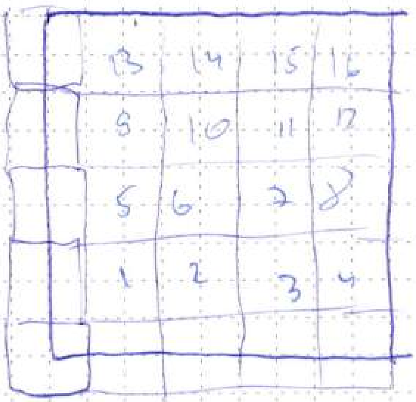
Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 75 7

~~...~~ разобьём ~~в~~ доску 30×30 на 2×2

получится 225 квадратиков 2×2, в каждом из них ≤ 1 короля $\Rightarrow$ равно 5 квадратиков в которых нет короля $(225-220=5)$

Докажем, что в каждом 9×9 ≥ 16 2×2

бывают разные случаи расположения 9×9 в нашей сетке квадратиков 2×2:



← Такой, а еще смещенный на: ~~клеток~~

[{ 1 влево, 1 вниз
{ 1 влево, 1 вниз

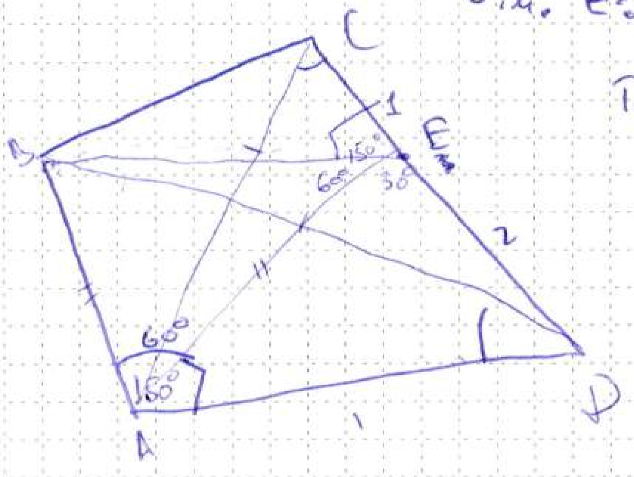
В каждом сл-е квадратов 2×2 ровно 16, в этом не трудно убедиться.

$\le$ в 5 квадратах (доказано выше) нет королей $\Rightarrow \geq 11$ есть $\Rightarrow$ ~~чтд~~.

$\Rightarrow$ королей ≥ 11 чтд

7/БТС 7 КА

Ответ: 2.



Отм. E: $E \in CD$ $CE = 1$

$DE = 2$

Тогда $\triangle ABD \overset{I}{=} \triangle ACE$

$\angle AEC = 150^\circ$ $AB = AE$

~~AB=AE~~

⇓

$\angle AED = 30^\circ$

Т. синусов для $\triangle AED$: $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin \angle EAD}$

⇓

$\sin \angle EAD = 1 \Rightarrow \angle EAD = 90^\circ$

$\angle BAE = 60^\circ$

Выше заметили, что $\triangle AEB$ - р/б ($AB = AE$) $\Rightarrow \triangle AEB$ - р/ст.

т.к. $\angle ABE = \angle AEB$ и $\angle ABE + \angle AEB = 120^\circ$

~~BE~~

$BE = AE$; $\angle AEB = 60^\circ \Rightarrow \angle BEC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

$AE^2 = 4 - 1$ $AE^2 = 3$ $\Rightarrow BE^2 = 3$ т. Пифагора для $\triangle ADE$

Также по т. Пифагора для $\triangle BEC$ $BC^2 = 1 + 3 = 4$

Значит $BC = 2$

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 75

Ответ: не может.

От противного

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = p^2\cdot(abc+1)$ $p\in\mathbb{P}$

1° 2 скобки делятся на p (слева)

НУО $ab+a+1$ и $bc+b+1$ $\Rightarrow$ $abc+1 \vdots ac+c+1$ (*) т.к. $\frac{abc+1}{ac+c+1} = \frac{(ab+a+1)(bc+b+1)}{p^2} \in \mathbb{Z}$

$ab+c+1 \vdots p \Rightarrow abc+ac+c \vdots p$ (из abc+ac+c вычти abc+1)

$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow abc+ab+a \vdots p$ (вычли(ab+a+1)) $\Rightarrow abc-1 \vdots p$ $\Rightarrow ac+c+1 \vdots p \Rightarrow$

из(*) $\Rightarrow abc+1 \vdots p \Rightarrow abc+1-abc+1 \vdots p \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p=2$

То есть $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = 4abc+4$

но л.ч. $\geq 3abc + abc + a + b + c + 1 + a^2b^2c^2$

1 из 1·1·1 a из a·1·1 аналогично b и c

abc из a·b·c

3abc из ab·c + ac·b + bc·a

$a^2b^2c^2$ из ab·bc·ac

получается л.ч. ≥ п.ч.+1 (?!)

2° 1 скобка $\vdots p^2$ (слева)

НУО $ab+c+1$

тогда $\frac{ab+a+1}{p^2} = \frac{abc+1}{(bc+b+1)(ac+c+1)} \in \mathbb{Z}$

$abc+1 \vdots (bc+b+1)(ac+c+1)$, но $(bc+b+1)(ac+c+1) \geq b+1+abc^2 \geq 1+abc+1$ (?!)

Нетрудно убедиться, что разобраны все случаи

7пп