$12^{28} - 12^{30}$

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ХАМИДУЛЛИН

Имя: ТАГИР

Отчество: АЛЬБЕРТОВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Казань

4. Контактный телефон +7 927 406 05 19

5. Контактный электронный адрес tagir.a.hamidullin@gmail.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Камидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Если Вася возьмет $n=45$, то получит не менее 4 пятерок т.к.:

$45 = 22+23$

$45 = 14+15+16$

$45 = 7+8+9+10+11$

$45 = 5+6+7+8+9+10$

~~Все~~ Во всех представлениях все слагаемые - подряд идущие числа, поэтому 45 - 2-хорошее, 3-хорошее, ~~4-хорош~~, 5-хорошее и 6-хорошее

При этом Вася получит не более 4 пятерок: т.к. в принципе Вася может получить максимум 5 пятерок и случится это только если его число n будет k-хорошим для всех k больших 1 и меньших 7 (т.к. по условию $k>1$, $k<7$ и от 2 до 6 всего 5 чисел, т.е. 5 значений, которые может принимать k)

Значит n - 2-хорошее и 4-хорошее тогда для некоторых $a \in N$ и $b \in N$

$n = a+(a+1)$ и $n = b+(b+1)+(b+2)+(b+3)$

$n = 2a+1$ $n = 4b+6$

тогда с одной стороны $n \vdots 2$ (т.к. $n = 2(2b+3)$)

а с другой $n \not\vdots 2$ (т.к. $n = 2a+1$) - противоречие

Вася не может получить ≥ 5 пятерок

Ответ: 4-пятерки

Задача № 2 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Камидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Пусть люди и кружки - вершины, а если человек ходит в какой-то кружок, то между соответствующими вершинами проводим ребро. Тогда получим двудольный граф где первая доля - люди, вторая - кружки.

Пусть ~~детей~~ людей n (по условию $6 < n < 60$)

(Галочка - два ребра в графе имеющие общую вершину) будем называть ту вершину в которой сходятся 2 ребра - главной, а 2 другие - придаточными)

~~Если~~ Пусть из каждой вершины первой доли исходит k ребер (по условию из них всех исходит равное число ребер). Ясно, что $k \geq 2$ (т.к. для любых 2-ух кружков есть 3 человека ходящие в них обоих).

Посчитаем кол-во галочек с главной вершиной в 1-ой доле. С одной стороны - это количество людей - n умножить на кол-во галочек с каждой вершиной 1-ой доли как главной - $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$ (т.к. - это просто кол-во способов выбрать ~~2 уп людей~~ 2 вершины среди k, к которым из нашей исходят ребра).

Итого $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$

А с другой стороны можно посчитать кол-во галочек с главной вершиной в 1-ой доли от придаточных вершин

Задача № 2 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Галиуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Т.е. кол-во галочек - это кол-во способов выбрать пару вершин из второй доли - $\frac{7\cdot6}{2}=21$ умножить на кол-во галочек которые ~~он~~ содержат 2 данные вершины, как придуманные - по условию это 3

Итого $21\cdot3=63$

Значит $63=\frac{n(k-1)k}{2} \Leftrightarrow 126=n(k-1)k$

$k>1 \Rightarrow$ все числа натуральные $(n, k-1, k)$

$n\cdot(k-1)\cdot k = 3\cdot3\cdot2\cdot7$

Если $n=7$, то $k\cdot(k-1)=18$ раз НОД$(k, k-1)=1$, $k-1, k \in \mathbb{N}$, то k или $k-1$ $\vdots 9 \Rightarrow k(k-1) \geq 9\cdot8=72>18$

Значит $n>7$; если $k=2$, то $n=3\cdot3\cdot7=63>60 \Rightarrow k>2$

$3\cdot3\cdot2\cdot7$ - простое разложение числа при этом n больше любого простого в разложении $\Rightarrow$ n - это произведение минимум 2-ух простых из разложения $\Rightarrow k(k-1)$ - это произведение не более 2-ух чисел из разложения (т.к. в нем всего 4 числа) при этом $k-1, k>1 \Rightarrow$ каждое из них - простое; $k, k-1$ - последовательные $\Rightarrow$ $k=3, k-1=2 \Rightarrow n=~~21~~\ 7\cdot3=21$. Из условия очевидно, что такой граф существует.

Ответ: 21

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Камизуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ясно, что $a+b+c \le 3$:

Иначе $a+b+c>3$, тогда раз $a+b+c \ge 0$ и $a+b+c=a^2+b^2+c^2$, то верно $(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)<0$

$0 > 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = (a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2 \ge 0$ т.к. квадраты чисел не отрицательны

Противоречие $\Rightarrow$ $a+b+c \le 3$

Ясно, что $a<2$, $b<2$, $c<2$:

Пусть нет, пусть $a \ge 2$, тогда $a^2+b^2+c^2 \ge$ $\ge 4 > a+b+c$, но $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$ Противоречие

Ясно, что если есть дробь $\frac{m}{n}$, где $m \ge 0$; $n>0$, $m \le n$ и есть число $a \ge 0$, то $\frac{m+a}{n+a} \ge \frac{m}{n}$ ~~т.к.~~

$\left(\frac{(m+a)n-(n+a)m}{(n+a)n} = \frac{an-am}{(n+a)n} = \frac{a(n-m)}{(n+a)n} \ge 0 \right)$

Тогда очевидно, что $(a-1)^2 \le 1$, $(b-1)^2 \le 1$, $(c-1)^2 \le 1$

т.к. $2 \ge a \ge 0$; $2 \ge b \ge 0$, $2 \ge c \ge 0$

и $b+c+1 \ge 1$; $c+a+1 \ge 1$; $a+b+1 \ge 1$

Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le 1$; $\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \le 1$; $\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le 1$ и числители и знаменатели ≥ 0

Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} + \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} + \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} =$

$= \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1}$ ч.т.д.

Задача № 4 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Халидуллин Тагир

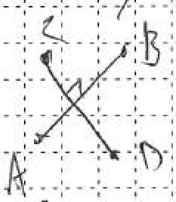
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Покажем, что если $k>0$ то должны быть ~~звенья~~ хотя бы 4 звена такие, что прямые их содержащие не параллельны. Предположим обратное, тогда таких прямых не более 2-ух (т.к. если есть хотя бы 3, то из-за того что $k>0$, для которой прямой содержащей какое-то звено есть прямая содержащая какое-то другое~~

~~Приведем пример на 2..~~ :
~~Построим квадрат 500×500~~

Ответ: 0

Ясно, что если 2 звена пересеклись пусть AB и CD



под прямым углом, то если ломаная соединяющая вершины A и D ненулевой длины, то ломаная соед. вершины C и B – тоже, но какой-то из отрезков CB и AD меньше $AB = CD$ ведь $CB + AD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}CD \Rightarrow$ получается четнозвенная ломаная у которой все звенья равны кроме 1 – оно меньше а такого не бывает $\Rightarrow$ если 2 звена и пересеклись под прямым углом то если все звенья проецировать то они разной четности будут.

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс | 8 |

2. Фамилия | Х | А | М | И | Д | У | Л | Л | И | Н |

Имя: | Т | А | Г | И | Р |

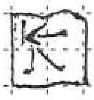
Отчество: | А | Л | Ь | Б | Е | Р | Т | О | В | И | Ч |

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Казань

Задача № 6 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Хамидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Давайте~~ Давайте разобьем доску 30×30 на квадратики 2×2 ~~далее~~ (так можно т.к. $30 \vdots 2$). Тогда их всего будет $\frac{30}{2}\cdot\frac{30}{2}=\frac{900}{4}=225$ (т.к. площадь каждого 4, а площадь всей доски 900). Заметим, что в любом квадратике 2×2 стоит ≤ 1 короля т.к. любые 2 из 4 клеток в нем соседние 

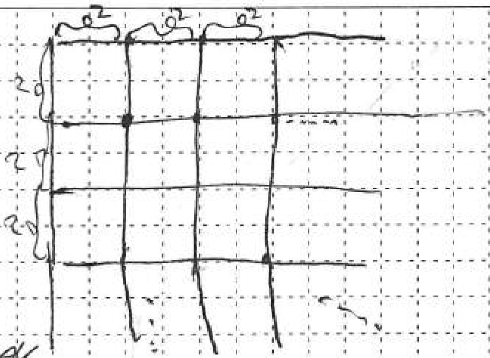
Теперь посмотрим на квадрат 9×9 в котором стоит ≥ 10 королей (если его нет, то доказано). *Ясно, что в любом квадрате 9×9 ~~на доске~~ есть хотябы 16 квадратиков 2×2, которые целиком лежат в нем. Тогда ~~по~~ по предположению в нем ≤ 10 королей, а на оставшейся доске осталось не более $225-16=209$ ~~клеток~~ ~~незатронутых~~ кв. 2×2, которые не целиком лежат в кв. 9×9 значит в них суммарно стоит не более 209 королей. Все остальные если где и стоят, то стоят внутри кв. 9×9 $\Rightarrow$ их не более 10 итого $209+10=219<220$.

* Давайте введем большую сетку (соответствующую разбиению на кв. 2×2, т.е. на 1 большего размера).

Задача № 5 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Камидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

как на рисунке →

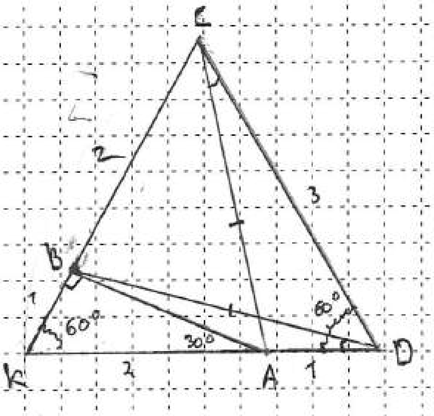


Покажем, что в силу нечетности сторон квадрата 9×9 хотя бы 1 из его вершинок попала в узел большой сетки (потому что хотя бы 1 из двух его параллельных сторон с каждой стороны лежит на линии большой сетки т.к. $9 \not\vdots\, 2 \Rightarrow$ 2 соседние стороны кв. 9×9 лежат на линиях большой сетки и соотв. верш. тогда является узлом большой сетки) Тогда от этой вершинки можно отложить квадрат 8×8 и т.к. $8 \vdots 2$, то все его вершины будут лежать на узлах сетки ⇒ в нем будет $\frac{8 \cdot 8}{4} = 16$ кв. 2×2 из разбиения ⇒

в исходном кв. 9×9 их тоже ≥16 ч.т.д.

Задача № 6 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Камидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Отложим отрезок длиной 2 ~~от~~ ~~от~~ точки A на прямой AD в сторону противоположную стороне в которой лежит точка D относительно точки A на прямой AD — получим точку K (как на рисунке)

Тогда $\angle KAB = 180^\circ - \angle BAD = 30^\circ$ (по условию $\angle BAD = 150^\circ$)

по условию $\angle BDA = \angle ACD$ и т.к. $KA + AD = 2+1 = 3 = CD$ (по условию)

$BD = CA$

то $\triangle KBD = \triangle DAC$ по I признаку $\Rightarrow KB = AD = 1$

Тогда* ясно, что т.к. $AK = 2BK$ и $\angle BAK = 30^\circ$, то $\angle KBA = 90^\circ \Rightarrow \angle BKA = 60^\circ$, т.к. есть равенство $\triangle$, то $\angle K = \angle ADC = 60^\circ$, тогда $KD = CD$ и $\angle KDC = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle KCD$ — равносторонний $\Rightarrow \angle CKD = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BKA = \angle CKA = 60^\circ \Rightarrow CBK$ — 1 прямая

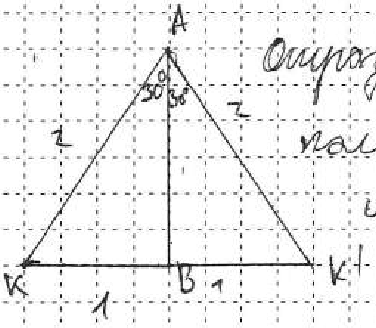
(причем точки лежат именно в таком порядке, следует из выпуклости) Тогда

т.к. $KD = CD = KC = 3$, то $BC = KC - KB = 3 - 1 = 2$ ч.т.д.

Задача № 6 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Хамидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

*



Отразим относительно AB — получим K'; тогда $\angle KAK' = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$ и $KA = K'A \Rightarrow \Delta KAK'$ — равносторонний $\Rightarrow KK' = 2$

Т.к. $\Delta KBA = \Delta K'BA$, то $KB = BK' = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow KB + BK' = KK' \Rightarrow KBK'$ — 1 прямая $\Rightarrow AB$ — высота
в $\Delta KAK'$ (т.к. B — середина KK'

Задача № 7 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Хамидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Заметим, что $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) =$
$= (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1) + abc(a+b+c+1) +$
$+ ca^2 + bc^2 + ab^2 + ab + bc + ac$

Потеряно слагаемое abc

Если $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)p^2$
где p - простое, то понятно, что
ни одна скобка не может делиться
на p^2, т.к. $p^2 \geq (a+1)(b+1)(c+1)$?
, а $(a+1)(b+1)(c+1)$ больше любой
скобки $\Rightarrow$ какие-то 2 скобки делятся
на p.

Пусть неумаляя общности
$ab+a+1 \vdots p$ и $bc+b+1 \vdots p$
Тогда ~~abc+~~ $(ab+a+1)\cdot c - (bc+b+1)\cdot a =$
$= ac+c-ab-a \vdots p$
$ac+c-ab-a = (ac+c+1) - (ab+a+1)$
разность их делится на p и второе
слагаемое делится на $p \Rightarrow ac+c+1 \vdots p \Rightarrow$
$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^3$ противоречие
Значит ~~a+b+~~ $abc+1 \vdots p$
Тогда знаем, что $abc+ac+c \vdots p \Rightarrow$
$\Rightarrow ac+c-1 \vdots p$, но и $ac+c+1 \vdots p \Rightarrow p=2$
но $(a+1)(b+1)(c+1) > 4 = p^2$ противоречие

Ответ: нет

Задача № 8 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Хамидуллин Тагир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

До этого сверху у нас получилось ровно то же самое но вместо −1 стоит −2
значит $\vdots$ $abc+1$ противоречие
$abc+1 \geq 2$ Ответ: нет

значит

$ab^2+bc^2+ca^2+ab+bc+ac-a-b-c-2 \vdots abc+1$

Сейчас докажем что $a \vdots 2$, $b \vdots 2$; $c \vdots 2$
и что $x_1=(abc+1)p^2$ $p \neq 2$

~~Заметим, что~~ ~~Пусть с наименьшее из~~

~~Заметим, что чисел~~

Заметим, что $x_1 c \vdots abc+1 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow (abc+ac+c)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots abc+1$~~

~~вычтем из первой скобки abc+1 тогда делимость останется ⇒~~

~~$\Rightarrow (ac$~~

Ответ: нет

Ответ: нет

Логичным действием является рассмотреть сумму 24 самых тяжелых гирь (предварительно упорядочив), а затем разобрать 2 случая в соответствии поставлены 25 гирь или 26 гирь оба этих случая приводят к противоречию