Задача № 7 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Хамзин, Дамир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: нет

Очевидно, вес всех гирек мы можем поделить на одно и то же натуральное число и если пример до этого работал, то и сейчас будет работать. Предположим противное.

Обозначим сумму от a_1 до a_{25} за S_1, от a_{26} до a_{50} за S_2 ($a_1 < a_2 < \ldots < a_{50}$)

Заметим, что если мы взвешиваем 24 гирьки из S_2 с какими-то из S_1, ~~тогда~~ (убираем гирьку a_i), то либо $S_2 - a_i = S_1$, либо $S_2 - a_i = S_1 + a_i$, либо $S_2 - a_i = S_1 + a_i - a_j$, где a_j — некая гирька из 1-ой группы.

Очевидно, что условия $S_2 - a_i = S_1$ или $S_2 - a_i = S_1 + a_i$ могут выполниться по одному разу, а во всех остальных случаях $S_2 - a_i = S_1 + a_i - a_j$.

Примечание: возможен ещё один случай, мной неописанный: $S_2 - a_i = S_1 - a_j + \ldots - a_q + a_i$, но такое возможно только при $i = 50$.

Рассмотрим случай если для всех взвешиваний $S_2 - a_i = S_1 + a_i - a_j$, тогда, очевидно a_i и a_j всегда разные, и, просуммировав все равенства получим $25S_2 - a_{26} - \ldots - a_{50} =$
$= 25S_1 + a_1 + \ldots + a_{25} - a_{26} - \ldots - a_{50} = 24S_2 =$
$= 26S_1 \Longrightarrow S_1 = \frac{12}{13} S_2$.

Там же так и меняется?

а как же случаи $S_2 - a_i = S_1$ и $S_2 - a_i = S_1 + a_i$

Задача № 7 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Хамзин, Дамир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№7.

Ответ: нет.

Предположим противное. Заметим, что, очевидно $abc+1$ делится на какую-то из скобок, т.к. иначе при делении от всех скобок останется ≥ 1 простой множитель, но тогда сумма степеней вхождений всех простых в наше частное будет ≥ 3 - противоречие. ~~Тогда либо при делении на $abc+1$ одна скобка сократится, а две других при последовательном~~

Тогда при последовательном делении сначала со скобки, на которую делится $abc+1$, от других двух скобок останутся p^2 и 1 или p и p. В 1-ом случае какая-то из скобок будет $\geq p^2$, однако заметим, что $p^2 > abc+a+b+c$, т.к. если нет, то $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) \leq (abc+a+b+c)(abc+1)$, но, если мы будем раскрывать скобки в $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)$, то, там будут слагаемые $a^2b^2c^2$, a^2bc, b^2ac, c^2ab, abc, a, b, c (при этом с минусом очев. не будет) и еще много других, тогда $a^2b^2c^2+a^2bc+b^2ac+c^2ab+abc+a+b+c+k \leq a^2b^2c^2+a^2bc+b^2ac+c^2ab+abc+a+b+c$, где $k \in \mathbb{N}$ - противоречие. Но, в силу натуральности всех чисел такого быть не может.

Остался 2-ой случай. Пусть, не умаляя общности 1-ая и 2-ая скобки кратны p, и

~~[illegible]~~ числа $abc+1 \vdots ca+c+1$. Тогда $ab+a+1 \underset{p}{\equiv}$ $(b+1)a+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow a \underset{p}{\equiv} \frac{p_b-1}{b+1}$; $bc+b+1 = b(c+1)+1 \underset{p}{\equiv}$ $0 \Rightarrow c \underset{p}{\equiv} \frac{p-1}{b} - 1 = \frac{p-1-b}{b}$. Тогда $ca+c+1 \underset{p}{\equiv}$ $\underset{p}{\equiv} \frac{(p-1-b)(p-1)}{b(b+1)} + \frac{p-1-b}{b} + 1 = \frac{(p+b)(p-1-b)}{b(b+1)} + 1 =$ $= \frac{p^2-p-b^2-b}{b(b+1)} + 1 = \frac{p^2-p}{b(b+1)} = \frac{p(p-1)}{b(b+1)}$.

что такое $\frac{1}{b+1}$ и всегда он есть?

Рассмотрим случай, когда никакое из чисел не $\underset{p}{\equiv}$ $c-1$ и 0 по модулю p. Тогда $ca+c+1 \vdots p$, т.к. $(b(b+1), p) = 1$. Значит и $abc+1 \vdots p$ (т.к. оно $\vdots ca+c+1$).

Имеем:

$ab+a+1 \vdots p$ ~~Вычтем из $abc+1$, $ab+b+1$ по-~~
$bc+b+1 \vdots p$ ~~лучим $abc-bc-b \vdots p$, т.е. $abc-bc-b=$~~
$ac+c+1 \vdots p$ ~~$=b(ac-c-1) \vdots p$. Т.к. $(b,p)=1$~~
$abc+1 \vdots p$ ~~по предположению, то $ac-c-1 \vdots p$~~
~~Но при этом $ac+a+1$ также $\vdots p$, т.е.~~

Вычтем из $abc+1$ $ab+a+1$, получим разность $a(bc-b-1)$, она $\vdots p$ т.к. вычитаемое и уменьшаемое $\vdots p$, однако, по предположению $a \not\vdots p$, тогда $bc-b-1 \vdots p$, при этом $bc+b+1 \vdots p$, т.е. $2b+2 = 2(b+1) \vdots p$, т.к. b по предположению не $\underset{p}{\equiv}$ $c-1$, то $p=2$, ~~при этом по принципу~~ $abc+1 \vdots 2$ т.е. abc — нечётное, но тогда все числа нечётные и $bc+b+1$ также нечётное, т.е. оно $\not\vdots 2$ — противоречие.

Задача № 7 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Хамзин, Дамир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Тогда либо какое-то число $\equiv 0$, либо $\underset{p}{\equiv} -1$. Пусть, не умаляя общности a.

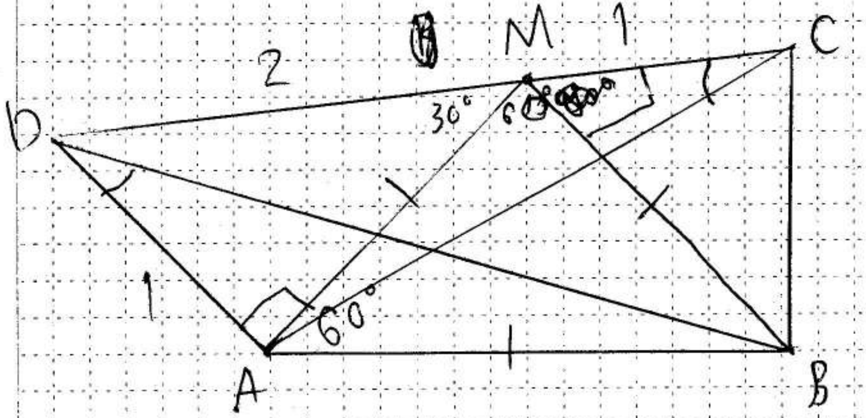
Тогда если оно сравнимо с 0, то $(ab+a+1; p) = 1$ — противоречие.

Если же оно сравнимо с -1, то $0 \underset{p}{\equiv} ab+a+1 \underset{p}{\equiv} b$, т.е. $b \vdots p$.

Но тогда $0 \underset{p}{\equiv} bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 1$ — противоречие.

Задача № 6 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Хамзин, Дамир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Отметим M на DC так, что $CM=1$, $DM=2$. Треугольники $\triangle DAB$ и $\triangle CMA$ равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AM=AB$ и $\angle AMC = \angle DAB = 150^\circ \Rightarrow \angle DMA = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. В треугольнике DAM сторона напротив угла в 30° равна половине прилежащей, тогда $\angle A = 90^\circ$ и $\angle D = 60^\circ$. ~~сим можно~~ Значит $\angle MAB = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. Проведем MB. В $\triangle MAB$, как мы уже раньше поняли $MA = AB$, при этом $\angle MAB = 60^\circ$, тогда он равносторонний и $MB = MA$. $\angle BMC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, тогда $\triangle DAM = \triangle MBC$ по двум катетам и $BC = DM = 2$

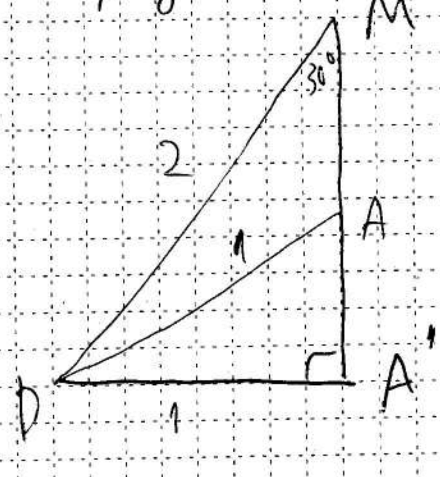
? док-во ниже

Примечание: наверное, не очень очевиден факт почему напротив 30° сторона в 2 раза меньше прилежащей, то он прямоугольный. Докажем его.

Задача № 6 Лист 2 из 2 Фамилия, имя:

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Предположим противное. Проведём



DA' ⊥ MA. В полученном треугольнике DA' = 1, однако DA является гипотенузой в DA'A, но она равна катету - противоречие.

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Каицин, Дамир

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Заметим, что в каждом квадратике 2 на 2 стоит не больше одного короля, поэтому в любой расстановке на доске королей, не бьющих друг друга не может быть $\geq (30\cdot30):(2\cdot2) = 15\cdot15 = 225$. (это же общее кол-во квадратов) ~~[illegible]~~

~~Поэтому не занято ~~…~~ 5 квадратов, при этом заметим, что, очевидно, в любом квадрате 9 на 9 будет 16~~

Значит, ровно 5 квадратов 2 на 2 не занято. Очевидно, в любом квадрате 9 на 9 всего 16 квадратов, при этом из них не занято максимум 5, тогда королей там $\geq 16-5=11$.

Примечание: доску 30×30 разобьём как на рисунке (аналогично, собственно, по-другому и нельзя:))