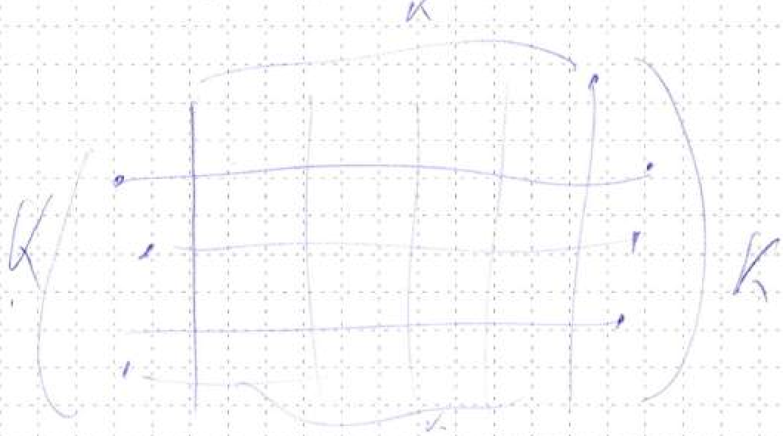
Задача №: 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 37

(4) Заметим что $k \le \cancel{12}0$ ^{125} т.к.
если у нас есть прямая что
пересекает n прямых под прямым углом, то
все они паралельны



тогда у нас есть $4k$ вершин?

которые ~~нд~~ надо соединить с другими
верш, чтобы каждая прямая была $\perp$ к
другим $\exists$ есть еще $4k$ точек,
(т.к. иначе какие то вершины ~~нечетн~~ нечетн
степени")

$\Rightarrow 8k \le 1000$ $k \le 125$

ин

O_{KA}

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 37

(1) Пусть Вася получил ~~6~~ 5-пятерок, тогда это число n является k-хорошим для $k = 2, 3, 4, 5, 6$ ⇒

$n = a_1 + (a_1+1) = 2a_1 + 1$ ← это число очев. нечетное

$n = a_2 + (a_2+1) + (a_2+2) = 3a_2 + 3$ ← это число м/б чет и нечет

$n = a_3 + (a_3+1) + (a_3+2) + (a_3+3) = 4a_3 + 6$ ← это число чет

$n = a_4 + (a_4+1) + (a_4+2) + (a_4+3) + (a_4+4) = 5a_4 + 10$ ← это м/б чет и нечет

$n = a_5 + (a_5+1) + (a_5+2) + (a_5+3) + (a_5+4) + (a_5+5) = 6a_5 + 15$ ← это нечет

~~$n = a_6 + (a_6+1) + (a_6+2)$~~

⇒ т.к. наше n должно быть одновременно четным и нечетным ?! ⇒ 5 пятерок быть не могло

Пример на 4

$105 = 52 + 53$

$105 = 34 + 35 + 36$

$105 = 19 + 20 + 21 + 22 + 23$

$105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$

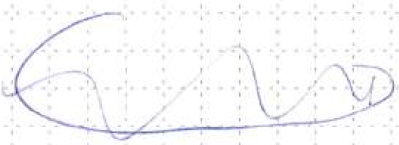
Ответ: 4

+ КА 7 УМ

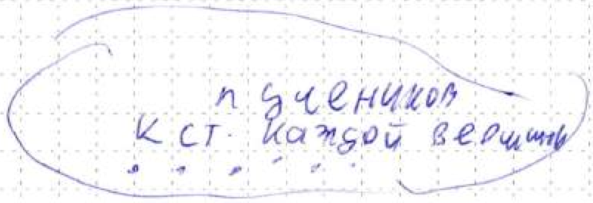
Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 37 7

+ К АБ + БС

(2)



Представим задачу, как граф проведем ребро между 2 вершинами если ученик ходит в кружок



Посчитаем число „галок"  двумя способами. С 1 стороны их $3\cdot C_7^2$ т.к для любой пары кружков есть 3 галки. С другой стороны их $n\cdot C_k^2$ т.к. для каждого ученика есть C_k^2 „галок" (k-степень верш. ученика)

$n\cdot C_k^2 = 3\cdot 21 = 63$

$\frac{n\cdot k(k-1)}{2} = 3\cdot 63$

$n\cdot k\cdot (k-1) = 3\cdot 3\cdot 7\cdot 2$

63	2	1	x
21	3	2	v
3	7	6	x

⇒ полезно написать почему x

Заметим, что это все варианты т.к. $126 \vdots 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 63, 126$ и мы рассмотрели все возможные k

⇒ ответ 21

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 2 Номер участника: 37

Давайте докажем, что ~~в~~ если есть правильная дробь $\frac{a}{b}$ $(a \le b)$ назовчто то $\frac{a+k}{b+k} \ge \frac{a}{b}$ при $k \ge 0$

+ ДП

т.к. числа полож. домножим на и на bk

некорректные (?)

$ab + kb \ge ab + ka$ $k=0$ то верно;

7 мм

$kb \ge ka$

$b \ge a$ ч.т.д.

Теперь докажем что $(a-1)^2 \le 1$ пусть это не так

тогда $(a-1)^2 \ge 1$ $a^2 - 2a \ge 0$

$a(a-2) \ge 0$ $\Rightarrow a \ge 2$

если $a \ge 2$ то $a^2 - a \ge 2$ (очев.)

$a(a-1) \ge 2$

а растет, растет

тогда

$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c = 0$

$\Downarrow$

~~либо~~ или $b^2 - b \le -1$ ~~или либо~~ или $c^2 - c \le -1$

$b^2 - b + 1 \le 0$

$(b-0{,}5)^2 + 0{,}75 \le 0$ или $(c-0{,}5)^2 + 0{,}75 \le 0$?!

$\Rightarrow$ $a < 2$

тогда $1 \ge (a-1)^2 \ge 0$, т.к. $a-1 \ge -1$ ~~$1 \ge$~~ ≥ -1

$\Rightarrow (a-1)^2 \le b + c + 1$ $\Rightarrow$ можем воспользоваться фактом

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 2 из 2 Номер участника: 37

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = \frac{a^2-2a+1}{b+c+1} \underset{1+a}{\overset{1+a \quad a\ge 0}{\le}} \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}$$

$$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \underset{1+b\ge 0}{\overset{1+b \quad b\ge 0}{\le}} \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}$$

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \overset{1+c \quad c\ge 0}{\le} \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}$$

по условию

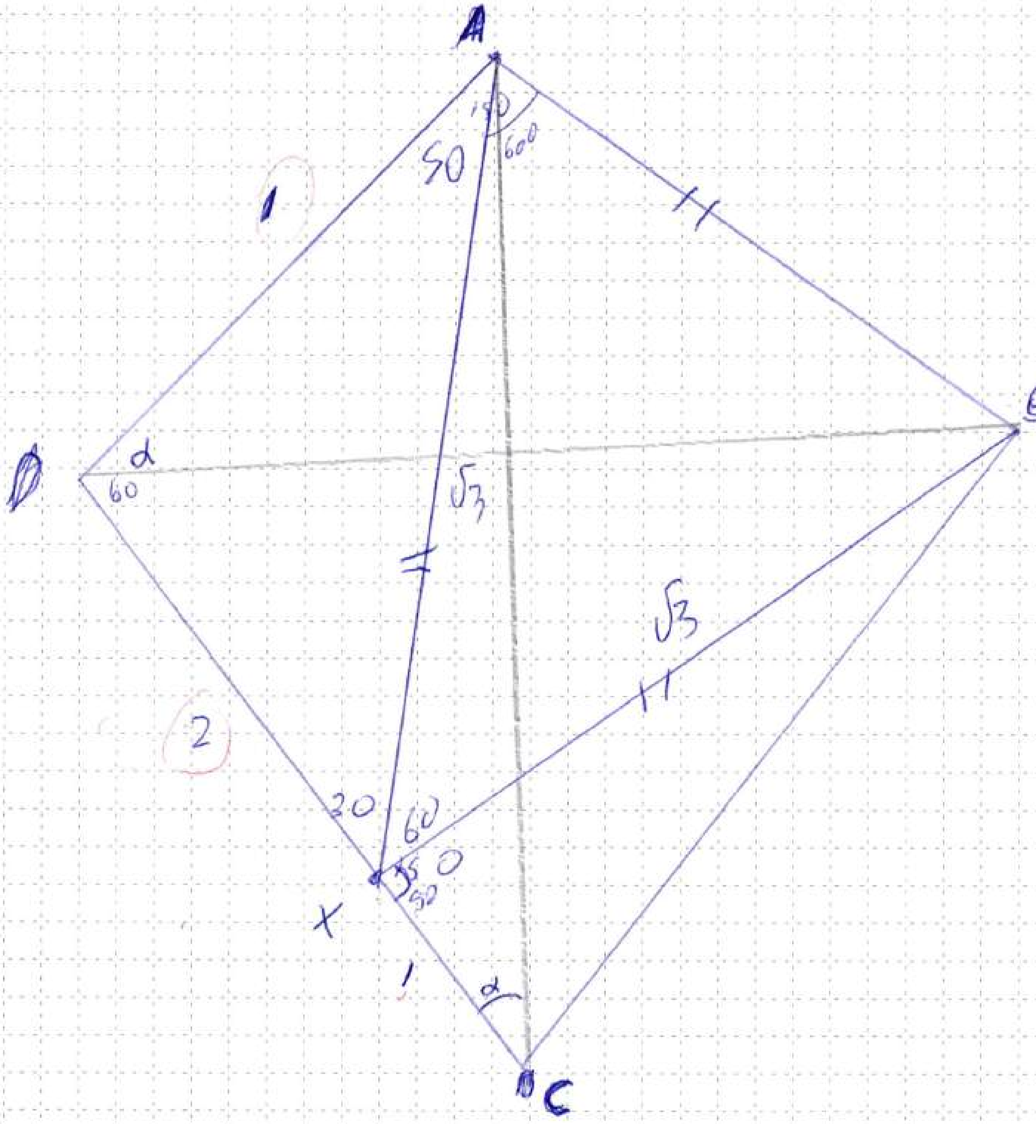
$$\Rightarrow \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{\overbrace{a^2+b^2+c^2-a-b-c}^{a+b+c}}{a+b+c+1} + 3 = \frac{3}{a+b+c+1}$$

ч.т.д.

Задача № 16 Лист 1 из 2 Номер участника: 37

+ 7

(14) (б)



Отметим (•) X на стороне ~~AD~~ CD, так что ~~DX~~ CX = 1

⇒ ~~AX = 3 - 1 = 2~~ DX = 3 - 1 = 2

Проведем AX $\triangle AXC = \triangle DAB$ (1 п.р.) AD = XD ?

AC = BD

⇓

⇒ $\angle AXC = 150$ $\angle AXD = 30$ ⇒ AX = AB $\angle ACX = \angle ADB$

напишем теорему синусов для $\triangle AXD$

$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{2}{\sin \angle DAX} = \frac{AX}{\sin \angle ADX}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sin \angle DAX} \qquad 2 = \frac{2}{\sin \angle DAX}$$

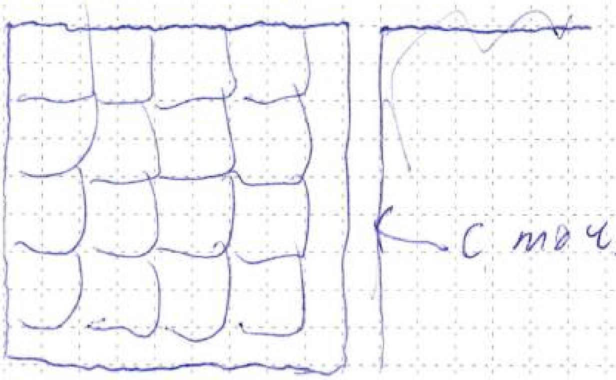
$\sin \angle DAX = 1 \Rightarrow$ о

$\angle DAX = 90$ (т.к. $\angle DAX < 150 \Rightarrow$ он $90°$)

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 37

(5)

Разобьем квадрат 30×30 на квадраты 2×2
их будет 15×15 = 225
Заметим, что в каждом квадрате 2×2
может стоять только 1 король =>
~~у нас max к~~ не занятых кв. 2×2 их
225−220 = 5 штук
Посмотрим на квадрат 8×8



← с точностью до поворота

+

~~в него можно к~~
из него можно вырезать 16 кв. 2×2
у нас не занято 5 таких кв =>
в 8×8 будет стоять хотя бы 16−5=11
королей ч.т.д.

7

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 37

+ к 16 6 ccc

(7) От противного:

(т.к. выражение зациклено)

Пусть (БНО) $ab+a+1 \vdots p$, и $bc+b+1 \vdots p$, где p, это $\sqrt{\text{частного}}$ частное$=p^2$

или одна $\vdots p^2$ (есть потом)

$\Rightarrow ab+a+1 \underset{p}{\equiv} bc+b+1 \Rightarrow ab \;\; a+1 \underset{p}{\equiv} -ab$

$b+1 \underset{p}{\equiv} -bc$

$a(b+1) \underset{p}{\equiv} b(a+1)$

Пусть тогда $ca+c+1 \not\vdots p$ $\quad -ab$

$ca+c+1 = c(a+1)+1 \underset{p}{\equiv} -abc+1$

Но т.к. $ab+a+1 \underset{p}{\equiv} 0$ то $a(b+1)+1 \underset{p}{\equiv} 0$ $\quad -abc+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow 1 \underset{p}{\equiv} abc$

$\Rightarrow ac+c+1 \vdots p \Rightarrow$ если 2 скобки делятся на p то 3 и тоже делится

тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) \vdots p^3$ но. А $\Rightarrow$

: если $abc+1 \not\vdots p$ то наше число не может быть квадратом $p \Rightarrow abc+1$ должно делится на p

Пусть $abc+1 \vdots p \Rightarrow$ ~~ab~~ $1 \underset{p}{\equiv} -abc$ но тогда

$abc \underset{p}{\equiv} -abc \quad 2abc \underset{p}{\equiv} 0$ либо $p=2$

либо $abc \vdots p$

Если $p=2$ то $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = 2^2(abc+1) = 4(abc+1)$

$a^2b^2c^2 + ab + bc + ac + 1$

то есть $a^2b^2c^2 + ab + bc \le 4(abc+1)$

тогда $\left[\begin{array}{l} abc=4 \\ abc=3 \\ abc=2 \\ abc=1 \end{array}\right.$ но несложно $abc(abc-4) \le 4$ проверить что в таких ситуациях $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) \ne 4(abc+1)$

5 случаев, там не более

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 37

$\Rightarrow p \neq 2$ и ~~а~~ тогда $abc \,\vdots\, p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots p \\ b \vdots p \\ c \vdots p \end{array}\right.$ но

тогда $(ab+a+1$ или $bc+b+1$ или $ca+c+1) \not\vdots\, p$

т.к. 1 из чисел $a, b, c \,\vdots\, p$

?!

$\Rightarrow$ если все 3 скобки $\vdots\, p$ и ~~то~~ $abc+1 \not\vdots\, p \Rightarrow$

частное $\vdots\, p^3$?!

$\Rightarrow$ все скобки сразу не могут $\vdots\, p \Rightarrow$

делится на p только 1 скобка $\Rightarrow$

эта скобка $\vdots$ на p^2

Значит $(bc+b+1)(ac+c+1) \not\vdots\, p \Rightarrow$

$abc+1 \,\vdots\, (bc+b+1)(ca+c+1)$ (т.к. в этих 2 скобках есть "не нужные p, которые останутся в частном, и частное $\neq p^2$)

~~но $bc+b+1 \geq bc$~~

~~$ac+c+1 \geq ac \Rightarrow$~~

~~$(bc+b+1)(ac+c+1) \geq abc^2$~~

~~и тогда $abc+1 \geq abc^2 \Rightarrow c=1$, но~~

если

$(bc+b+1)(ca+c+1) = abc^2 + abc + ac + bc^2 + bc + b + bc + b + 1$

$= abc^2 + bc^2 + bc + abc + bc + b + ac + c + 1$

это выражение очевидно больше чем $abc+1 \Rightarrow$

$abc+1 \not\vdots\, (bc+b+1)(ac+c+1) \Rightarrow$ частное $\neq p^2$ Ч.Т.Д.

Задача № 16 Лист 2 из 2 Номер участника: 37

$\Rightarrow \angle XAB = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$

Проведем XB ΔXAB р/б с углом 60° $\Rightarrow$

р/с $\Rightarrow$ $AX = AB = XB$ $\Rightarrow \angle AXB = 60 \Rightarrow \angle BXC = 90$

$\cancel{AX^2 = AD}$

$DX^2 = AD^2 + AX^2$ (т. Пифагора)

$4 = 1 + AX^2 \Rightarrow AX = \sqrt{3} \Rightarrow BX = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{XC^2 + BX^2} = \sqrt{1+3} = 2$

т.к. ΔBXC - прям

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 37

Оклб — С5

(8)

Упорядочим гирьки

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots a_{50}$

$a_{28} > a_2$

$a_{27} > a_1$

т.к.

Заметим что либо $a_{27} + \dots a_{50} = a_1 + \dots a_{26}$

либо $a_{27} + a_{50} = a_1 + \dots a_{26} - a_n$

24 26

$n \in [1; 26)$

① $a_{27} + \dots a_{50} = a_1 + \dots a_{26}$

$a_{27} + \dots a_{50} - a_{25} - a_{26} = a_1 + \dots a_{24}$

т.к. чисел других нет =>

$a_{50} > a_n = a_{25} + a_{26}$ (т.к. Σ 26 чисел справа $> a_{25} + a_{26}$)

$n \in [27; 50]$

$\Rightarrow a_{50} \geq a_{25} + a_{26}$

Пусть $a_{49} \geq a_{25} + a_{26} \Rightarrow a_{50} > a_{24} + a_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + \dots a_{24} \geq a_{27} + \dots a_{49} \Rightarrow$

$a_1 \geq (a_{45} - a_{24}) + (a_{44} - a_{23}) + \dots (a_{27} - a_2)$

$a_{27} + \dots a_{48} < a_1 + \dots a_{22}$?!

$\Rightarrow a_{49} < a_{25} + a_{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{50} = a_{25} + a_{26}$

$a_{27} + \dots a_{45} = a_1 + \dots a_{24}$?!

Но тогда т.к. $a_{27} > a_1$, $a_{28} > a_2$ ... $a_{45} > a_{24}$

~~$(a_{27} + \dots a_{50}) - (a_{27} + \dots a_{45}) = (a_{?} + \dots a_{26}) - (a_1 + \dots a_{24})$~~ ?