Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

.... - ....
аудитория – посадочное место

41306299
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ Ау	+ ем	+ МС	∓ АБ	
7 Аю	7 пр	7 и.б.	2 ВБ	23

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306299 — номер участника

лист 1 из 7

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1

Запишем условия на k-хорошесть:

k	n
2	$= x_1 + (x_1+1) = 2x_1+1$
3	$= x_2 + (x_2+1) + (x_2+2) = 3x_2+3$
4	$= x_3 + (x_3+1) + (x_3+2) + (x_3+3) = 4x_3+6$
5	$= x_4 + \ldots + (x_4+4) = 5x_4+10$
6	$= x_5 + \ldots + (x_5+5) = 6x_5+15$

$x_1, \ldots x_5$ - нат. числа

если $n \vdots 2$, то оно не будет 2-хорошим и 6-хорошим, тогда максимум 3 пятёрки (из чётности, $2x_1+1 \not\vdots 2$, $6x_5+15 \not\vdots 2$)

если $n \not\vdots 2$, то оно точно не 4-хорошее, максимум 4 пятёрки. (также по чётности $4x_3+6 \vdots 2$)

Значит максимум он получит 4 пятёрки.

Пример на 4 пятёрки:

$n = 105$

Тогда оно: 2-хорошее: $52+53=105$

3-хорошее: $34+35+36=105$

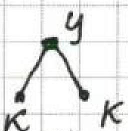
5-хорошее: $19+20+\ldots+23 = 19\cdot5+1+2+3+4 = 95+10=105$

6-хорошее: $15+16+17+18+19+20 = 15\cdot6+1+\ldots+5 = 90+15 = 105$.

Значит ответ: 4 пятёрки.

№2

построим двудольный граф:
1ая доля - ученики
2ая доля - кружки
ребро если ученик посещает кружок.
назовём растопыркой такой объект:



(ученик и 2а кружка, которые он посещает.
(кружки без учёта порядка)));
пусть учеников n и каждый посещает m кружков.
тогда посчитаем количество растопырок по ученикам: каждый ученик участвует в C_m^2 растопырках ~~(важно не пересекаются, т.к.~~
тогда растопырок $n \cdot C_m^2$; мы не посчитали ни какую растопырку дважды, т.к. в каждой растопырке 1 ученик и посчитали их все.
теперь посчитаем растопырки по кружкам: по условию на каждую пару кружков "опирается" ровно 3 ученика, т.е. 3 растопырки.
тогда растопырок $C_7^2 \cdot 3$;
получаем: $nC_m^2 = 3 \cdot C_7^2$

$$n \cdot \frac{m(m-1)}{2} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2}$$

$$n(m)(m-1) = 3 \cdot 7 \cdot 6$$

см. продолжение

1) значит $3 \cdot 6 \cdot 7 \vdots n$; $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \vdots n$; и по условию $6 < n < 60$

№2 продолжение

запишем все делители $2\cdot 3^2\cdot 7$:

$\{1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 9, 42, 18,$ ~~[illegible]~~ $63, 126\}$

под n подходят: ~~[illegible]~~

$\{7; 9; 14; 18; 21; 42\}$; (по условию)

~~$n=7$: тогда $m(m-1)=$ [illegible]~~

1) если $n \vdots 2$, то $\frac{2\cdot 3^2\cdot 7}{n} \not\vdots 2$, и тогда $m(m-1) \not\vdots 2$, что неправда, значит $n \not\vdots 2$;

остаётся: $\{7; 9; 21\}$;

2) $n=7$: $(m-1)\,m = 2\cdot 3^2 = 18$

Тогда: $m^2-m-18=0$ $D=(-1)^2+4\cdot 18=73, \neq x^2$, значит корни нерац, а не целые.

3) $n=9$: $m(m-1)=14$

Тогда: $m^2-m-14=0$ $D=(-1)^2+4\cdot 14=57\neq x^2$

4) $n=21$: $m(m-1)=2\cdot 3$

$m=3$ подходит.

значит, если такое возможно, то $n=21$, т. к. другие варианты не подходят. по условию такое случилось, значит возможно. значит $n=21$

ответ: 21;

~~[illegible]~~

№3

оценим слагаемые левой части по отдельности.

Лемма 1: $\frac{x}{y} \le \frac{x+d}{y+d}$ при $d>0$ и $x \le y$, и $y>0$; $x \ge 0$

доказательство: т.к. все числа ≥ 0, то можно домножить крест на крест:

$x(y+d) \le y(x+d)$

$xy + dx \le xy + dy$

$dx \le dy$; т.к. $d>0$ $:d$

$x \le y$, что верно по предположению.

Также, при $d=0$ это неравенство очевидно верно. (там $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$)

оценим $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}$;

1) $(a-1)^2 \overset{?}{\le} b+c+1$ (докажем)

$a^2-2a+\cancel{1} \le b+c+\cancel{1}$

$a^2 \le b+c+a+a$, по усл заменим на $a^2+b^2+c^2$, $a+b+c$

$a^2 \le a^2+b^2+c^2+a$

$0 \le b^2+c^2+a$; т.к. все числа не отрицательны (a, b^2, c^2) то это верно.

Значит можно применить лемму 1 для $d=a$, условия для нее: 1) $a \ge 0$ усл; 2) $(a-1)^2 \le b+c+1$ доказали, $b+c+1>0$ очевидно, $(a-1)^2 \ge 0$ очевидно, значит можно применить

см продолжение

№3 продолжение

значит $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2+a}{b+c+1+a} = \frac{a^2-a+1}{b+c+1}$;

аналогично оценим остальные слагаемые:

$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \leq \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}$

$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}$;

тогда: $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+c+1} \leq \frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{a+b+c+1} =$

$= \frac{3+a^2+b^2+c^2-a-b-c}{a+b+c+1}$; по усл $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$,

значит $a^2+b^2+c^2-a-b-c=0$;

значит: $= \frac{3}{a+b+c+1}$;

значит

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^3}{a+b+1} \leq \frac{3}{1+a+b+c}$ Ч.Т.Д.

№4

~~0) считаем, что $k>0$, и б.о.о. считаем, что длина звена $=1$.~~

~~Разобьём все прямые звенья на m групп, в каждой группе параллельные прямые.~~

~~Эти группы должны разбиться на~~

~~Тогда для каждого звена AB $\exists$ звено CD, проходящее через него и перпендикулярно ему~~

~~Рассмотрим минимальную выпуклую оболочку множества точек этой ломаной. Оценим площадь S оболочки.~~

№4

~~Пронумеруем вершины ломаной от 1 до 1000 (звенья между соседними вершинами). Запишем последовательность ориентированных углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{1000}$ (по часовой стрелке)~~

№4

а если $k=0$?

Докажем, что $k \leq 250$; (считаем, что $k>0$)

Разобьём звенья на группы параллельных звеньев; пусть групп m; Тогда у каждой группы должна быть „перпендикулярная“ к ней группа, и в каждой группе $\geq k$ звеньев.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306299 — номер участника

лист 7 из 7

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№4 продолжение

если группы 2е, То наша ломанная будет ~~образует~~ иметь вершины только в точках с целыми координатами. (будет группа и перпен-

как выбирается система координат? ☺

дикулярная к ней, и можно считать б.о.о., что длина звена $=1$);

но тогда пересечений не будет.

значит групп хотя бы 4 (т.к. $\vdots 2$, мы разбили их на пары);

и ~~каждая~~ $1000 \geq km$

$$\frac{1000}{m} \geq k$$

$$\frac{1000}{4} \geq k$$

$$250 \geq k$$

значит $k \leq 250$

Ответ: 250

∓

а пример?

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

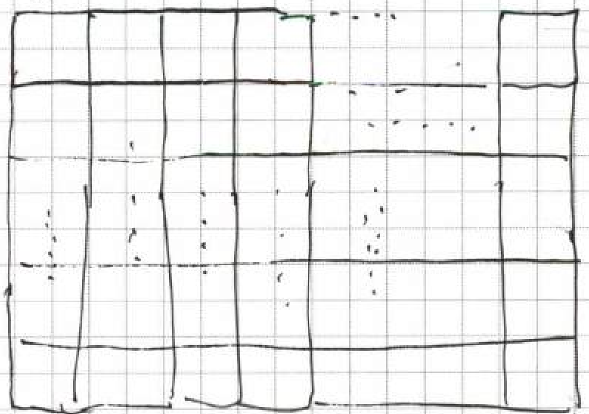
41306299 — номер участника

лист 1 из 7

№5

~~Докажем, что~~

Разобьём доску на квадраты 2x2 по горизонтали через 2 клетки и по вертикали через 2 клетки, таким образом:



1) тогда квадратов будет $\frac{30}{2}\cdot\frac{30}{2}=15^2=225$.

2) в каждом маленьком квадрате стоит ≤ 1 короля, т.к. иначе они бьют друг друга, значит максимум в $225-220=5$ квадратах.

В любом квадрате 9x9 есть хотя бы 16 квадратиков (в квадрате 8x8, с вершиной в левом верхнем углу, если она попадает в сетку из маленьких квадратов, либо с левой верхней, сдвинутой на 1 вправо и 1 вниз относительно вершины 9x9) значит в каждом 9x9 ≥ 16 квадратиков и максимум в 5 и нет королей. значит в ≥ 11 квадратиках он есть. Ч.Т.Д.

8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

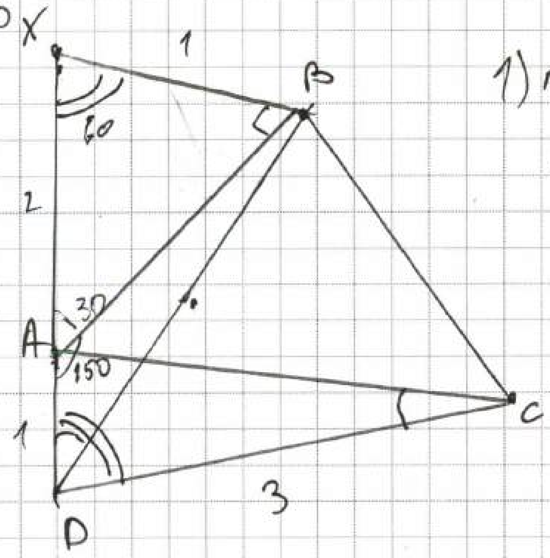
Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Г.Жель. - ....
аудитория – посадочное место

41306299
номер участника

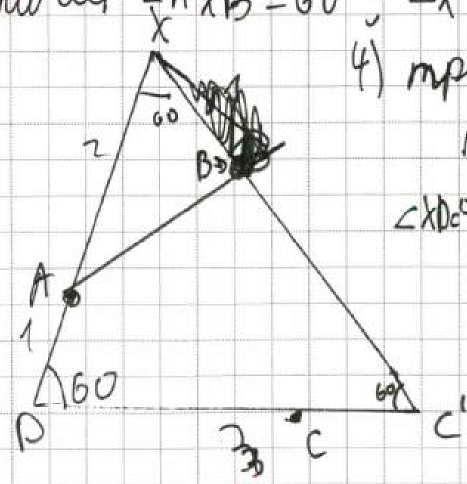
5	6	7	8	Σ
+пр	+кн	+кн	−мк	
7вс	7рх	7рх	0к.ю.	21

№6



1) продолжим DA за точку A так, чтобы AX=2;
Тогда DX = AX+AD = 2+1 = 3 = DC
тогда △XDB = △DCA
по I ому признаку (рав △)
∠ACD = ∠XDB по усл
AC = BD (диагонали
XD = DC;
Тогда BX = AD = 1, как соотв. эл.
и ∠ADC = ∠BXD

2) BX = AD = 1
3) и AX = 2 = по построению и ∠XAB = 30° (= 180° − ∠DAB = 180° − 150°)
по △30-60-90 получаем, что △AXD 30-60-90 (т.к. есть угол 30° и прилежащая к нему сторона вдвое больше противолежащей.
значит ∠AXB = 60°; ∠XBA = 90°



4) продлим XB до пересечения с DC.
получим C', тогда в △XDC':
∠XDC = ∠DXB = ∠DXC' = 60°, значит он равносторонний.
значит DC' = DX = 3,
DC' = 3 = DC, и
C' и C с одной стороны

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306299 — номер участника

№8 продолжение

от D на прямой DC, значит $C = C'$

значит B лежит на CX;

$CX = 3$ (из правильности $\triangle DXC$), $XB = 1$

значит $BC = CX - BX = 3 - 1 = 2$; (очевидно, что B на XC, а не за точкой X, из построения точки X);

ответ: 2

N7

~~пусть 2e~~ из

1) пусть можно:

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=p^2(abc+1)$

пусть 2e скобочки (б.о.о. $ab+a+1$ и $bc+b+1$, иначе сделаем на a, b, c циклический сдвиг) делятся на p.

тогда: $\begin{cases} ab+a+1 \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{cases}$

тогда: $\begin{cases} c(ab+a+1) \vdots p \\ a(bc+b+1) \vdots p \end{cases}$

$\begin{cases} abc+ac+c \vdots p \\ abc+ab+a \vdots p \end{cases}$

$-abc \underset{p}{\equiv} ac+c \underset{p}{\equiv} ab+a \underset{p}{\equiv} ab+a+1-1 \underset{p}{\equiv} -1$

но тогда и $ac+c+1 \vdots p$.

тогда, т. к. у p только вторая степень в правой части (без $abc+1$), то и $abc+1 \vdots p$

тогда:

$\begin{cases} abc+ac+c \vdots p \ (1) \\ abc+1 \vdots p \ (2) \\ ac+c+1 \vdots p \ (3) \end{cases}$

из (1) вычтем 3: $abc-1 \vdots p$ и $abc+1 \vdots p$ (из 2)

N7 продолжение

значит $2 \vdots p$ и $p=2$

(2) тогда: $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=4(abc+1)$; (I)

заметим, что левая часть $> a^2b^2c^2$;

$4(abc+1) > a^2b^2c^2$

$4 > abc(abc-4)$

если $abc>4$, то $abc(abc-4) \geq abc > abc > 4$ ж,

значит $abc \leq 4$;

Такое если: 1) $a=b=c=1$. Тогда: $3^3=4\cdot 2$, нет

2) $a=b=1$; $c=2$: $2\cdot 4\cdot 5=4\cdot 5$, нет

($b\neq 2$

3) $a=1$; $b=1$; $c=3$:

$2\cdot 5\cdot 7=4\cdot 4$, нет

4) $a=1$; $b=1$; $c=4$: $2\cdot 6\cdot 9=4\cdot 5$, нет

5) $a=b=2$; $c=1$

$7\cdot 5\cdot 4=4\cdot 5$, нет

(ясно, что все случаи сводятся к этим с точностью до циклического сдвига a, b, c;)

значит, $p\neq 2$ и только одна из скобочек делится на p. (и хотя бы $\vdots p^2$)

~~(3) теперь докажем, что a, b, c чётные.~~

~~пусть это не так.~~

~~тогда возможны случаи (с точностью до циклического сдвига):~~

№7

~~продолжение? пусть б.о.о. это $ab+a+1=p^2A$~~

~~$p^2(abc+1)=p^2A(bc+b+1)(ac+c+1)$~~

~~$abc+1=A(bc+b+1)(ac+c+1)$;~~

~~$abc+1 \geq (bc+b+1)(ac+c+1)$~~

~~$abc+1 \geq abc^2+bc^2+bc+abc+bc+b+ac+c+1$~~

~~$0 \geq abc^2+bc^2+bc+bc+b+ac+c$. W.~~

~~Значит, такое не возможно.~~

Пусть это скобочка (без ограничения общности) $ab+a+1=p^{\alpha}A$; $(\alpha \geq 2)$

тогда $p^2(abc+1)=p^{\alpha}A(bc+b+1)(ac+c+1)$

$abc+1=(p^{\alpha-2}A)(bc+b+1)(ac+c+1)$

$abc+1 \geq (bc+b+1)(ac+c+1)=$

$= abc^2+\ldots+ac\cdot b+1\cdot 1+\ldots > abc+1$ W.

значит такое не возможно.

№7 №8

Упорядочим гири по весу: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{50}$;

Пусть $a_1 + \ldots + a_{24} = S_1$

$a_{27} + \ldots + a_{50} = S_2$

тогда $S_2 = \sum a_i \le S_1 + a_{25} + a_{26}$

и $S_2 > a_{26} + a_{25} + \ldots + a_3$ (т.к. почленно справа от > все меньше, чем слева и их поровну.

значит:

$a_3 + \ldots + a_{25} + a_{26} < S_2 \le a_1 + a_2 + \ldots + a_{26}$