Задача № 5 Лист 1 из 5 Фамилия, имя: Корнильцев Семён

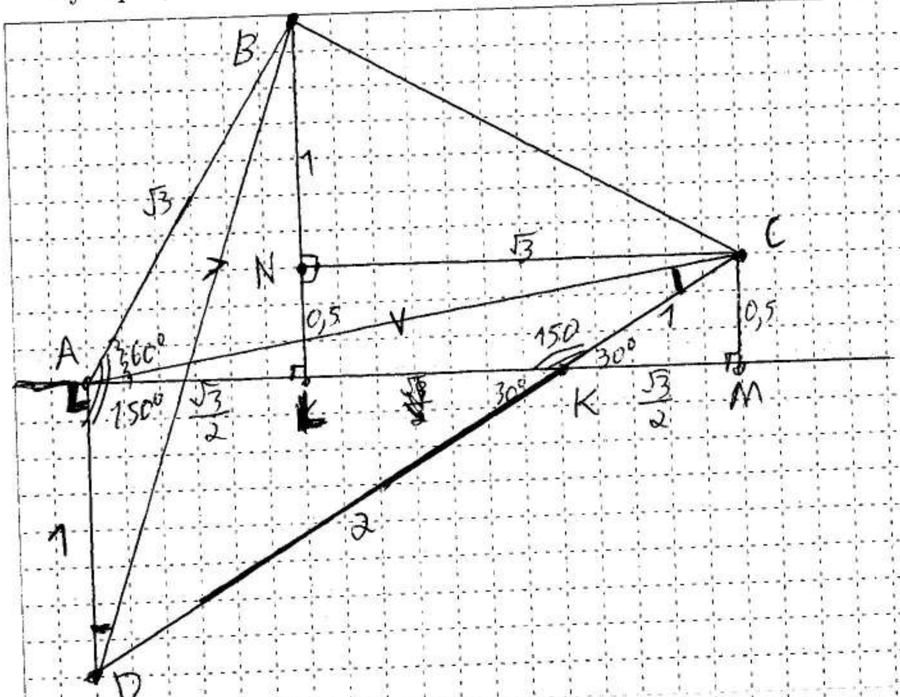
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разделим доску на 225 квадратов 2×2. Тогда в каждом квадрате 2×2 не более 1 короля (т.е. 0 или 1), иначе в этом квадрате 2×2 была бы пара бьющих друг друга королей. И если квадратов 2×2 – 225 штук, и в каждом 0 или 1 король, а королей 220, то будет 5 квадратов 2×2 без короля и 220 с 1 королём. Если 9×9, то одна из вершин квадрата 9×9 совпадает с вершиной ~~каждого~~ ~~го~~ квадрата 2×2. И тогда в 9×9 можно взять 8×8, у которой одна из вершин совпадает с вершиной 2×2. Значит 8×8 содержит 16 2×2 из разбиения, т.е. 9×9 содержит 16 квадратов 2×2 полностью. И если среди этих 16 квадратов 2×2 не более 5 без короля (всего на доске 5 штук 2×2 без короля), то 11≤ квадратов с 1 королем. Т.е. в любом квадрате 9×9 есть 11≤ квадратов 2×2 с 1 ~~кор~~ королем. Т.е. в любом 9×9 стоит не менее 11 королей. Ч.т.д.

⊗

Задача № 6 Лист 2 из 5 Фамилия, имя: Корытников Семён

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Пусть K — точка на CD, что $CK=1$ и $DK=2$, L, M — проекции B и C соответственно на AK и N — проекция C на BK (см. рис.)
Заметим, что $\triangle ADB = \triangle ACK$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle ADB=\angle ACD=\angle ACK$, $BD=AC$ (диагонали $ABCD$), $AD=1=CK$). Тогда $\angle AKC=\angle BAD=150^\circ$, ведь эти углы лежат против равных сторон ($BD=AC$) в равных треугольниках ($\triangle ADB=\triangle ACK$). Тогда $\angle AKD=30^\circ=\angle CKM$, ведь они смежны к $\angle AKC=150^\circ$. И если в $\triangle ADK$ $\angle AKD=30^\circ$, $DK=2$ и $AD=1$, то $\angle DAK=90^\circ$. ?
И значит $\angle BAK=\angle BAD-\angle DAK=150^\circ-90^\circ=60^\circ$ ($ABCD$ — выпуклый).
Если в $\triangle ADK$ $\angle DAK=90^\circ$, $\angle AKD=30^\circ$ и $DK=2$, то $AK=\sqrt{3}$. И если в $\triangle CKM$, $\angle KMC=90^\circ$, $\angle CKM=30^\circ$ и $KC=1$, почему? то $KM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Также если $\triangle ADB=\triangle AKC$ и $\angle ADB=\angle ACD$, то $AB=AK=\sqrt{3}$.

Задача № 6 Лист 3 из 5 Фамилия, имя: Коротников Семён

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

может $\angle AKB$?

и если в $\triangle ABL$ $\angle BAL = 60°$, $\angle ALB = 90°$ и $AB = \sqrt{3}$, то $\angle ABL = 30°$, а значит $AL = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $BL = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Тогда в прямоугольнике $CNLM$ ($\angle CNL = \angle NLM = \angle LMC = 90°$) $CM = 0{,}5$ (в $\triangle CKM$ $\angle CKM = 30°$, $\angle KMC = 90°$ и $CK = 1$) и $LM = AM - AL = AK + KM - AL = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, а значит $CN = LM = \sqrt{3}$ и $NL = CM = 0{,}5 \Rightarrow BN = BL - NL = 1{,}5 - 0{,}5 = 1$. И если в $\triangle BNC$ ~~$BN = 1$, и $CN = \sqrt{3}$~~, $BN = 1$, $CN = \sqrt{3}$ и $\angle BNC = 90°$, то по теореме Пифагора $BC = \sqrt{BN^2 + CN^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: $BC = 2$

Задача № 7 Лист 4 из 5 Фамилия, имя: Корытников Семён

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

(Это не полное решение, где не ~~уч~~ учтено когда a, b, c - чётные)

Рассмотрим, какой чётности могут быть a, b, c:

1) $a, b, c \not\vdots 2$

Т.е. $a, b, c \equiv_2 1$. Но тогда:

$abc+1 \equiv_2 1^3+1 \equiv_2 0$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \equiv_2$

$\equiv_2 (a(b+1)+1)(b(c+1)+1)(c(a+1)+1) \equiv_2$

$\equiv_2 (0+1)(0+1)(0+1) \equiv_2 1^3 \equiv_2 1$

Т.е. $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \not\vdots 2$, $abc+1 \vdots 2$ и $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots abc+1$ (квадрат простого всегда натурален), что невозможно

2) Одно из a, b, c - чётно (не умоляя общности, пусть $a \vdots 2$ и $b, c \not\vdots 2$)

Тогда $abc \vdots 2 \Rightarrow abc+1 \not\vdots 2$. И $(ca+c+1) \vdots 2$

~~$(ca+a+1)$~~ ($ca+c+1 = c(a+1)+1$, где $a+1, c \not\vdots 2 \Rightarrow$ $c(a+1)+1 \vdots 2$), а значит и $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots 2$. И значит частное - чётно ($x \vdots y$, где $x \vdots 2$ и $y \not\vdots 2$), т.е. квадрат простого - это 2^2.

Тогда:

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = 4(abc+1) \Rightarrow$

~~$ab+bc+ca+a+b+c+ab+\ldots^3 < (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) =$~~

~~$4abc+4 \quad > ab+c$~~

$ab\cdot bc\cdot ac+26\le(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=4abc+4\Rightarrow$

$(abc)^2<4abc\Rightarrow abc<4\ (a,b,c>0)\Rightarrow abc\le 3\ (a,b,c\in\mathbb{N})$

(при раскрытии скобок в

$(ab+b+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$ будет $ab\cdot bc\cdot ca$ и

еще 26 слагаемых с a,b,c, где $a,b,c\ge 1$)

$abc\ne 1,3$, иначе a,b,c – нечётные и

это невозможно. Тогда $abc=2$

(не умоляя общности, пусть $a=2$; $b,c=1$);

$abc+1=1\cdot1\cdot2+1=3$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(2\cdot1+2+1)(1\cdot1+1+1)\cdot$

$\cdot(1\cdot2+1+1)=5\cdot3\cdot4=60$

$60:3=20$, что не квадрат простого

Т.е. тогда $a,b,c\in\varnothing$

3) Одно из a,b,c – нечётно (не умоляя общности, пусть $a\not\vdots 2$)

Тогда $abc+1\not\vdots 2$, $(ca+a+1)=(c(a+1)+1)\vdots 2\Rightarrow$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)\vdots 2$. Т.е. получили случай, что и в предыдущем. Т.е. $a,b,c\in\varnothing$

4) $a,b,c\ \vdots\ 2$ (не разобран)

Ответ: нет, не может.

Случай a,b,c – четные не разобран и разобрать его сильно сложнее, чем остальные

$\ominus$

Рассмотрен случай $p=2$