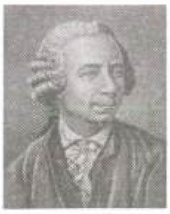


8

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 4В
аудитория – посадочное место

41306276
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ ОЛ	+ КА	∅ АБ	
7 АЧ	7 Ел.	7 МС	∅ МК	21

1 Пример:
Если $n=45$, то оно является 2-хорошим, т.к. $45=22+23$, 3-хорошим, т.к. $45=14+15+16$, 5-хорошим, т.к. $45=7+8+9+10+11$ и 6-хорошим, т.к. $45=5+6+7+8+9+10$. Таким образом Вася получит 4 пятёрки.

Оценка:
Всего натуральных чисел, больших 1 и меньших 7, ровно 5. Но при этом придуманное Васей число n не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим, т.к. в таком случае, если оно 2-хорошее, то представляется в виде суммы четного и нечетного, значит оно нечетно, а ~~если~~ еще оно 4-хорошее значит представляется в виде суммы двух чётных и двух нечетных, значит оно чётно, но число не может быть одновременно четным и нечётным. Значит число n либо не 2-хорошее, либо не 4-хорошее, а тогда Вася мог получить не более 4 пятёрок.

Ответ: 4 пятерки.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306276 — номер участника

лист 02 из 04

2. Оценка:

Пусть было n учеников ($7 \le n \le 59$) и каждый из них ходил в x кружков. Рассмотрим граф, в котором мы будем соединять 2 кружка ребром столько раз, сколько учеников ходит в каждый из них. Из условия в таком графе $3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 63$ ребра, т.к. всего 21 пара и в каждой вершины соединены 3 ребрами. При этом каждый ученик добавляет в граф $\frac{x(x-1)}{2}$ рёбер, т.к. каждой паре кружков, которых $\frac{x(x-1)}{2}$, он добавляет по ребру. Значит у нас получается равенство:

$n \cdot \frac{x(x-1)}{2} = 63$. n - это делитель 63, которых 6 (1, 3, 7, 9, 21, 63), но $n \ne 1$, $n \ne 3$, $n \ne 63$ т.к. $7 \le n \le 59$. Если $n = 7$, то $\frac{x(x-1)}{2} = 9 \Rightarrow x(x-1) = 18$, но если $x = 5$, то $5 \cdot 4 = 20$, а если $x = 4$ то $4 \cdot 3 = 12$, то есть нет натурального x, где $x(x-1) = 18$. Если $n = 9$, то $\frac{x(x-1)}{2} = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x-1) = 14$, но если $x = 4$, то $4 \cdot 3 = 12$ и если $x = 5$, то $5 \cdot 4 = 20$, то есть нет натурального x, где $x(x-1) = 14$. Если же $n = 21$, то $\frac{x(x-1)}{2} = 3$, что возможно при $x = 3$. Получается, в классе ~~мож~~ могло быть только 21 человек.

+ верно.

пример верный

2 (продолжение)

Пример:

Пусть кружки были под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Тогда, если 3 человека посещают кружки 1, 2, 3, ещё 3 – 1, 4, 5, ещё 3 – 1, 6, 7, ещё 3 – 2, 4, 6, ещё 3 – 2, 5, 7, ещё 3 – 3, 5, 6 и последние 3 – 3, 4, 7, то всего был 21 ученик, каждый посещает по 3 кружка, а также у любых двух кружков ровно 3 общих ученика, т.к. есть 3 ученика, посещающих одни и те же кружки, которые посещают 2 конкретных, но все остальных тройки учеников не посещают одновременно эти 2 кружка.

Ответ: 21 ученик.

3. Известно: $a^2+b^2+c^2=a+b+c$, $a, b, c \geq 0$

Док-ть:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{3}{1+a+b+c} \Big| \cdot (1+a+b+c)>0$$

$$\frac{(b+c+1)(a-1)^2+a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(a+c+1)(b-1)^2+b(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(a+b+1)(c-1)^2+c(c-1)^2}{a+b+1} \leq 3$$

$$\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{b(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{c(c-1)^2}{a+b+1}+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \leq 3$$

$$\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{b(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{c(c-1)^2}{a+b+1} \leq 3-a^2-b^2-c^2+2a+2b+2c-3$$

$$\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{b(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{c(c-1)^2}{a+b+1} \leq 2a+2b+2c-a^2-b^2-c^2=2a+2b+2c-a-b-c = a+b+c$$

$$a\left(\frac{(a-1)^2}{b+c+1}-1\right)+b\left(\frac{(b-1)^2}{a+c+1}-1\right)+c\left(\frac{(c-1)^2}{a+b+1}-1\right) \leq 0$$

Тогда, если доказать, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}-1 \leq 0$, то аналогично доказывается, что $\frac{(b-1)^2}{a+c+1}-1 \leq 0$ и $\frac{(c-1)^2}{a+b+1}-1 \leq 0$, а тогда $\underbrace{a\left(\frac{(a-1)^2}{b+c+1}-1\right)}_{\leq 0}+\underbrace{b\left(\frac{(b-1)^2}{a+c+1}-1\right)}_{\leq 0}+\underbrace{c\left(\frac{(c-1)^2}{a+b+1}-1\right)}_{\leq 0} \leq 0$ то есть утверждение задачи будет верно. Докажем это:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq 1 \overset{\cdot(b+c+1)>0}{\Leftrightarrow} (a-1)^2 \leq b+c+1 \Leftrightarrow a^2-2a+1 \leq b+c+1 \Leftrightarrow a^2-2a \leq b+c$$

$$b^2+c^2+a \geq 0 \Leftrightarrow a^2-2a \leq a^2+b^2+c^2-a$$

это верно, т.к. $b^2, c^2, a \geq 0$

чтд

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 28

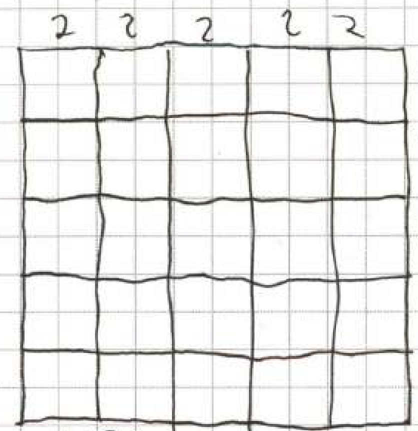
аудитория – посадочное место

41306276

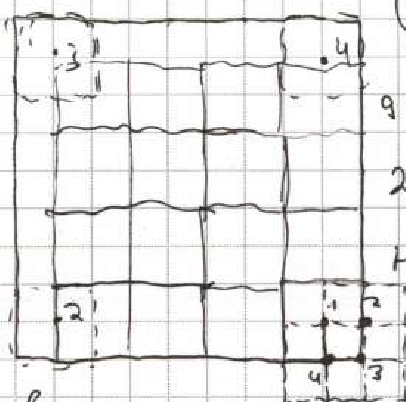
номер участника

5	6	7	8	Σ
V + АД	+ РХ	−· АЛ.	Ø КА	
7 ПР	7 КН	1 КН	Ø МК	15

5.

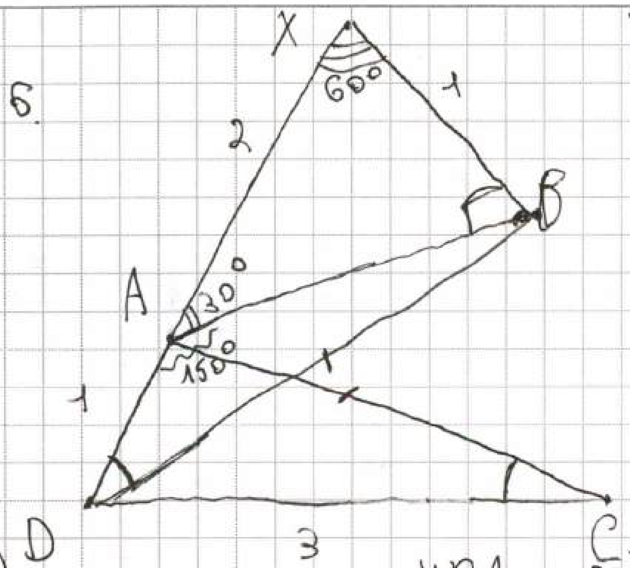


Разобьём доску на 225 квадратов 2×2 так, как показано на рисунке, только в квадрате 30×30. В каждом квадратике 2×2 может стоять не более одного короля, т.к. короли не бьют друг друга. Тогда, т.к. всего 220 королей, будет ровно 5 квадратов 2×2 без королей.



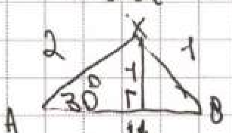
Докажем, что в любом квадрате 9×9 есть хотя бы 16 квадратов 2×2. Рассмотрим правый нижний угол и точки 1, 2, 3, 4. В одной из них точно есть центр квадрата 2×2. Если центр в 1-ой, то в правом нижнем углу есть квадрат, если во 2-ой, то в левом нижнем углу квадрат, если в 3-ей, то в левом верхнем квадрат, если в 4-ой, то в правом верхнем квадрат. Пусть не умаляя общности квадрат в правом нижнем углу. Тогда можно выделить „подквадрат“ 8×8, в котором 16 квадратов 2×2. Значит, т.к. не более, чем в пяти из них нет королей, всего в квадрате 9×9 хотя бы $16-5=11$ королей, что

6.

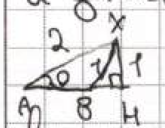


Построим на луче DA такую точку X, что $AX = 2$ (а значит $DX = 3$). Тогда $\triangle BDX = \triangle ACD$ по I пр.:
1) $AC = BD$ (по усл.) 2) $\angle BDX = \angle ACD$ (по усл.)
3) $CD = DX = 3$ (по усл. и постр.)
Значит $BX = AD = 1$

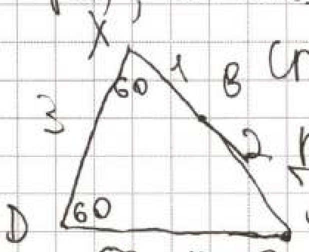
Докажем, что $\angle XBA = 90°$. Пусть это не так. Тогда, если $\angle XBA$ - острый, то опустив из X высоту



получим, что $XH = \frac{2}{2} = 1$ в прямоугольном треугольнике с углом $30°$, но тогда $\triangle XHB$ - р/б, а значит $\angle XBA = \angle XHB = 90°$, что невозможно.



Аналогично, если $\angle XBA$ тупой, то опустив высоту $XH = 1$, а значит $\angle XBA = 90°$, что невозможно.
Тогда $\angle BXA = 180° - 30° - 90° = 60°$ (по сумме углов тр.), а т.к. $\triangle BDX = \triangle ACD$, $\angle XDC = 60°$. $\triangle XCD$ - равносторонний, т.к. $XD = DC = 3$ и угол между 2 равными сторонами $60°$ $\angle XDC = 60°$.



Тогда $XC = XD = 3$. Также $B \in XC$, т.к. $\angle DXB = \angle DXC = 60°$. Значит $BC = XC - XB = 3 - 1 = 2$.

Ответ: $BC = 2$.

7. Пусть $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{abc+1} = p^2$, где p - простое число

$$\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{p^2} = abc+1$$

В таком случае, либо одна из скобок делится на p^2, либо две скобки делятся на p (где p - нечетное простое число) (также что-то из этого может быть одновременно). Тогда 3-я скобка - это делитель $abc+1$, пусть это $ab+a+1$. Также степень вхождения p в $bc+b+1$ и $ac+c+1$ равна 1, т.к. если $bc+b+1$ или $ac+c+1 \vdots p^2$, то $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{p^2} \geq (ab+a+1)(bc+b+1)$ или $(ab+a+1)(ac+c+1) > abc+1$.