РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия КУДРЯШОВ

Имя: ЕГОР

Отчество: КОНСТАНТИНОВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Татарстан

4. Контактный телефон 89600618565

5. Контактный электронный адрес egorkudryashov1383@gmail.com.

12:14–12:15

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: ~~5~~ 4 Пример: 45.

$45 = 22+23$

$45 = 14+15+16$

$45 = 7+8+9+10+11$

$45 = 5+6+7+8+9+10$. Оценка: пусть Вася получил ≥ 5 пятерок. Это значит, что его число 2-хорошее, 3-хорошее, 4-хорошее, 5-хорошее, 6-хорошее. т.к. ~~всего~~ натуральных чисел, больших 1, и меньших 7 всего 5. Заметим, что если число n 4-хорошее и 2-хорошее одновременно, то $n = x+(x+1) = y+(y+1)+(y+2)+(y+3)$, $x, y \in \mathbb{N}$, т.е. $n = 2x+1 = 4y+6$. Но ~~заметим, что~~ число $2x+1$ - нечетное, а $4y+6$ - четное. Значит число не может быть 2-хорошим и 4-хорошим одновременно, ~~так~~ т.к. число не может быть ~~чет~~ нечетным и четным одновременно. Следовательно, Вася не получит хотя бы одну из этих двух пятёрок, тогда всего пятерок ≤ 4

Задача № 2 Лист ~~1~~ 1 из ~~3~~ 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Ответ~~

Давайте будем считать „галочки", т.е. из одного ребенка и двух кружков (ребенок входит в оба кружка). Тогда с одной стороны, галочек 63, потому что ~~мы знаем~~ по условию, для любых двух кружков найдутся ровно 3 ученика, которые посещают оба кружка, а это значит, что # галочек равно ~~произведению~~ $3 \cdot \#$пар кружков $= 3 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 63$. С другой стороны, пусть у нас n учеников, поскольку ~~у~~ все ученики посещают одинаковое кол-во кружков, пусть это будет k, то # галочек равно $n \cdot C_k^2$ т.к. если мы возьмем любого ученика и 2 любых его кружка, то получим галочку. Тогда $63 = n \cdot C_k^2$. По условию, $n > 6 \to n \geq 7$. А это значит, что есть ровно 3 варианта:

1) $n = 7$, $C_k^2 = 9$; 2) $n = 9$, $C_k^2 = 7$, 3) $n = 21$, $C_k^2 = 3$.

В иных случаях $n \geq 63$ или $n < 7$.

1) $n = 7$, $C_k^2 = 9$. Этот случай невозможен, т.к. ~~...~~ $C_4^2 < C_k^2 = 9 < C_5^2$ т.е. ~~k~~ $k \notin N$

2) $n = 9$, $C_k^2 = 7$. Этот случай также невозможен т.к. $6 = C_4^2 < C_k^2 = 7 < C_5^2 = 10$,

Задача № 2 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

...то есть $k \notin \mathbb{N}$.

3) $n = 21$; $C_k^2 = 3$. Да, этот случай возможен, пример:

~~Разобьём людей на гру~~

Пронумеруем детей и разобьём на группы по 3 человека: 1 гр 1, 2, 3; 2 гр 4, 5, 6; 3 гр 7, 8, 9; 4 гр 10, 11, 12; 5 гр 13, 14, 15; 6 гр 16, 17, 18; 7 гр 19, 20, 21.

А также пронумеруем кружки от 1 до 7. А теперь, будем ~~соединять~~ добавлять всех детей из какой-то группы в ~~на~~ конкретные ~~клубы~~ кружки:

1 группа: 1, 2, 3

2 группа: 1, 4, 5

3 группа: 1, 6, 7

4 гр: 2, 4, 6

5 гр: 2, 5, 7

6 гр: 3, 4, 7

7 гр: 3, 5, 6

Заметим, что при таком разбиении ~~в~~ ~~клубы~~ ~~двух клубов~~ любые 2 ~~клуба~~ кружка будут соединены только с вершинами из одной группы, ~~т.к. в группах по 3 человека, то для всех клубов кружков будут ровно 3 человека, которые входят в оба~~. При этом любая пара клубов ~~вх~~ соединена с какой-то из групп, потому ~~любая пара~~ удовл. условию

Задача № 2 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

... поэтому любая пара кружков ~~соединена с вершинами~~ входит
ровно
в кружки одной группы. А ~~за~~ поскольку в группах по 3 ученика, то для у любых кружков ~~к~~ таких учеников ровно 3. Поэтому, учеников может быть 21 и никаких других количеств быть не может

Ответ: 21

Задача № 3 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Докажем, что $a+b+c\leq 3$. Пусть это не так, тогда пусть $a+b+c>3$. Тогда неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим не выполняется

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3} \quad \Big|\ \text{возведём в квадрат т.к.} \geq 0$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{(a+b+c)^2}{9} \quad \Big|\cdot 9$$

$3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$ пусть $a+b+c=x$. Тогда $a^2+b^2+c^2=x$

$3x\geq x^2$

$x(3-x)\geq 0$. Очевидно, что если $x>3$, то это неправда

Это значит, что ~~a, b, c каждое~~

$a, b, c\leq\sqrt{3}<2$. Тогда $(a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2\leq 1$.

Теперь перейдем к нашему неравенству

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\overset{?}{\leq}\frac{3}{a+b+c+1} \quad \Big|\cdot(a+b+c+1)$$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}(a+b+c+1)+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}(a+b+c+1)+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}(a+b+c+1)\overset{?}{\leq}3$$

$$(a-1)^2+\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+(b-1)^2+\frac{(b-1)^2b}{a+c+1}+(c-1)^2+\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}\overset{?}{\leq}3$$

$$\underbrace{a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1}_{a^2+b^2+c^2-a-b-c=0}+\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2b}{a+c+1}+\frac{c(c-1)^2}{a+b+1}\overset{?}{\leq}3$$

остальное вправо

$$\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{b(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{c(c-1)^2}{a+b+1}\overset{?}{\leq}3-3+a+b+c$$

$$\frac{a(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{b(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{c(c-1)^2}{a+b+1}\overset{?}{\leq}a+b+c$$

переносим всё вправо

Задача № 3 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$$0 \overset{?}{\leq} \left(a - \frac{a(a-1)^2}{b+c+1}\right) + \left(b - \frac{b(b-1)^2}{a+c+1}\right) + \left(c - \frac{c(c-1)^2}{a+b+1}\right)$$

$$a - \frac{a(a-1)^2}{b+c+1} = a\left(1 - \frac{(a-1)^2}{b+c+1}\right)$$ если $a=0$ то и так 0 поэтому можно поделить.

$1 - \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \overset{?}{\geq} 0$ Так как $(a-1)^2 < 1$ (писал на 1-ом листе) и $b+c+1 \geq 1$, то $1 - \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \geq 0$.

Следовательно, $a - \frac{a(a-1)^2}{b+c+1} \geq 0$. Аналогично, для $b - \frac{b(b-1)^2}{a+c+1} \geq 0$ и $c - \frac{c(c-1)^2}{a+b+1} \geq 0$, тогда и их сумма неотрицательна.

$$\underbrace{\left(a - \frac{a(a-1)^2}{b+c+1}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(b - \frac{b(b-1)^2}{a+c+1}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(c - \frac{c(c-1)^2}{a+b+1}\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия КУДРЯШОВ

Имя: ЕГОР

Отчество: КОНСТАНТИНОВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

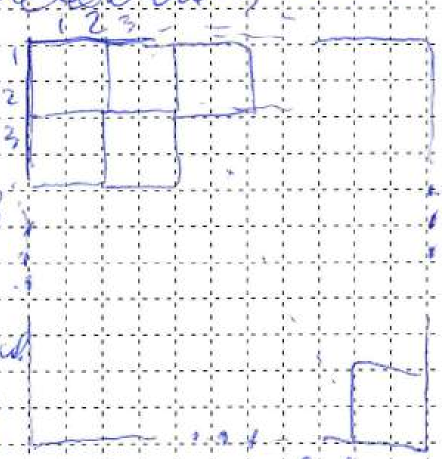
3. Регион ТАТАРСТАН

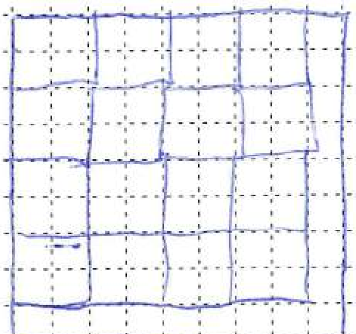
11:13 – 11:14

Задача № 5 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Егор

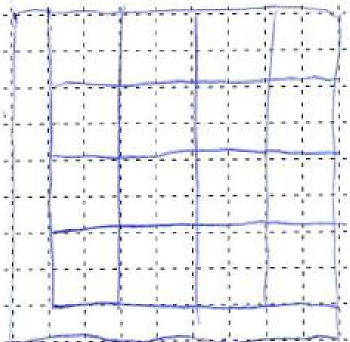
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте разобьем квадрат на 225 целиком квадратиков 2·2. Докажем, что в ~~каждом будут~~ ~~поль содержаться в~~ ~~квад~~ любом квадрате 3·3 будет ~~св~~ целиком содержаться 16 квадратиков 2·2. ~~Пусть левый верхний угол квадрата 3·3~~ Давайте пронумеруем столбцы и строки 1..30 ~~т.е.~~ (справа налево и ~~снизу вверх~~ сверху вниз). Тогда ~~пусть~~ в зав-ти от четности номера столбца и строки подойдет вариант:

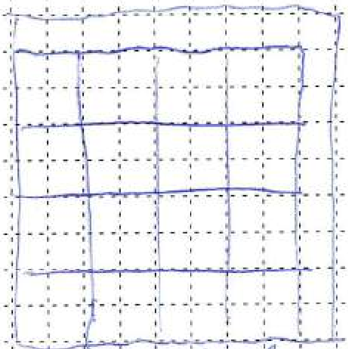




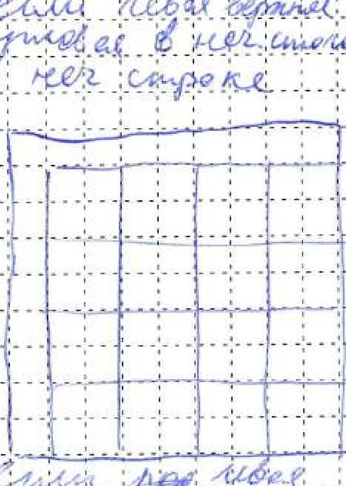
если левая верхняя угловая в неч столбце и неч строке



если правая верхняя угловая в неч строке и чет столбце



если левая верхняя угловая в ~~неч~~ чет строке и неч ст.



если ~~пра~~ левая верхняя угловая в чет строке и чет столбце

Соответственно, оставшиеся квадратики содержатся в квадрате 3·3 не полностью или вообще не содержатся. Таких квадратиков 225 − 16 = 209. А поскольку в квадратике 2·2 помещается не больше

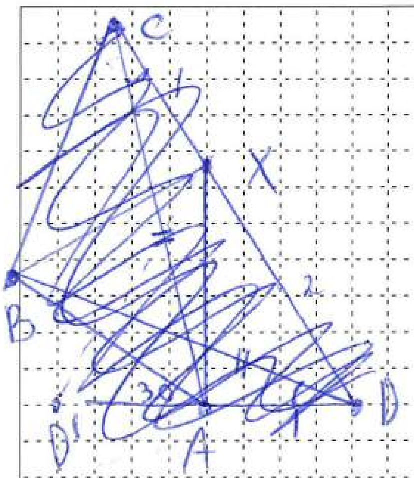
Задача № 5 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

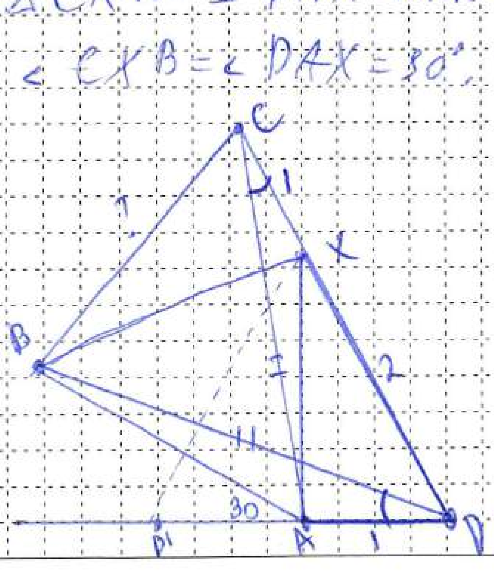
— не бьёт одного ~~то~~ короля (если не то ~~[illegible]~~ в бьют друг друга), ~~тогда~~ в этих 205 квадратиках ≤ 205 королей. Значит, в оставшихся 11-ти, входящих в квадрат [illegible] $\geq (220-205)$, т.е. ≥ 11 королей. ЧТД

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кузнецов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Давайте отметим точку X на CD так, что $CX = 1$. Тогда $\triangle ACX = \triangle BDA$ по 2-ум сторонам и углу между ними ($AC = BD$, $CX = AD$, $\angle ACX = \angle BDA$). А это значит, что $\angle AXC = \angle BAD = 150°$. Тогда $\angle AXD = 30°$. ~~Тогда~~ Докажем, что $\angle XAD = 90°$. Отразим D относительно XA. Тогда $XD' = XD$, $\angle D'XA = 30° \rightarrow$ Тогда $D'XD$ равносторонний, при этом $D'A + A'D = 1 + 1 = D'D$, следовательно $A \in D'D$. Тогда $XA \perp D'D. \rightarrow \angle XAD = 90°$. Тогда ~~$\triangle XAB$~~ $\angle XAB =$ ~~$180 - \angle XAD - \angle BAD$~~ $= \angle BAD - \angle XAD = 150 - 90 = 60$. Кроме того, поскольку $\triangle ACX = \triangle BDA$, то $AB = AX$, а это значит, что BAX равносторонний $\rightarrow \angle BXA = 60°$. Тогда $\angle BXC = 180 - \angle AXD - \angle BXA = 180 - 30 - 60 = 90°$. Тогда $\triangle CXB = \triangle DAX$ т.к. $CX = AD = 1$, $BX = AX$, $\angle CXB = \angle DAX = 90°$. Тогда $BC = XD = 2$.



Задача № 17 Лист 1 из 4 Фамилия, имя: Кузнецов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Допустим, что их частное может быть квадратом простого числа (p). Тогда

$$\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}{abc+1} = p^2$$

Докажем, что степень вхождения p в каждую из трёх скобок ≤ 1. Допустим это не так, не умаляя общности пусть $ab+a+1 \,\vdots\, p^2$. Тогда $abc+1 \,\vdots\, ((bc+b+1)(ac+c+1))$, но понятно что такого не может быть потому что $(bc+b+1)(ac+c+1) > (bc+1)(a+1) > abc+1$. Следовательно, степень вхождения p в каждую из трёх скобок ≤ 1. Это значит, что хотя бы 2 скобки делятся на p. Докажем, что все скобки делятся на p. Не умаляя общности, пусть $bc+b+1 \,\vdots\, p$ и $ac+c+1 \,\vdots\, p$.

~~bc+~~ Перепишем в виде сравнения

$$bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0 \qquad ac+c+1 \underset{p}{\equiv} 0$$

$$b(c+1) \underset{p}{\equiv} -1 \qquad c(a+1) \underset{p}{\equiv} -1$$

$$b \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{c+1} \qquad a+1 \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{c}$$

$$b+1 \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{c+1}+1 \qquad a \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{c}-1$$

$$b+1 \underset{p}{\equiv} \frac{c}{c+1} \qquad a \underset{p}{\equiv} -\frac{c+1}{c}$$

тогда ~~ab+a+1~~ $ab+a+1 = a(b+1)+1$

$$a(b+1)+1 \underset{p}{\equiv} -\frac{c+1}{c}\left(\frac{c}{c+1}\right)+1 \underset{p}{\equiv} -1+1 \underset{p}{\equiv} 0$$

Значит, $ab+a+1$ тоже делится на p.

Задача № 7 Лист 2 из 4 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Значит, степень вхождения p в числитель равна трём. Тогда abc+1 тоже делится на p, степень вхождения p равна 1 ~~(доказ)~~. Сложим ab+a+1, bc+b+1, ac+c+1, abc+1.

$abc+1+ab+a+1+bc+b+1+ac+c+1=$

$=abc+ab+bc+ac+a+b+c+4$. Так как все 4 слагаемых делятся на p, то их сумма тоже делится на p. Тогда запишем сравнение

$abc+ab+bc+ac+a+b+c+4 \underset{p}{\equiv} 0$

$abc+ab+bc+ac+a+b+c+1 \underset{p}{\equiv} -3$

$(a+1)(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} -3$. Возведём сравнение в квадрат (правую и левую части)

$(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 \underset{p}{\equiv} 9$ Перегруппируем.

$((a+1)(b+1))\cdot((a+1)(c+1))((b+1)(c+1)) \underset{p}{\equiv} 9$

$(ab+a+b+1)(ac+a+c+1)(bc+b+c+1) \underset{p}{\equiv} 9$. Поскольку $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p$, $ac+a+1 \vdots p$, то

$(ab+a+b+1) \underset{p}{\equiv} b$

$(bc+b+c+1) \underset{p}{\equiv} c$

$(ac+a+c+1) \underset{p}{\equiv} a$

Тогда $(ab+a+b+1)(ac+a+c+1)(bc+b+c+1) \underset{p}{\equiv} abc$, то есть $abc \underset{p}{\equiv} 9$. А так как $abc+1 \vdots p$, то $-1 \underset{p}{\equiv} 9 \to 10 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow 10 \vdots p$. Тогда $p=2$ или $p=5$

Задача № 7 Лист 3 из 4 Фамилия, имя: Кудрявцев Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разберем оба случая

1) пусть $p=2$. Тогда поскольку $abc+1 \vdots p$, то abc нечетное $\rightarrow a, b, c$ нечетные. Тогда очевидно, что $ab+a+1 \not\vdots 2$ т.к оно нечетное. Значит, $p \neq 2$

2) пусть $p=5$.

Тогда $ab+a+1 \underset{5}{\equiv} 0$, $bc+b+1 \underset{5}{\equiv} 0$, $ac+c+1 \underset{5}{\equiv} 0$, $abc+1 \underset{5}{\equiv} 0$, $\rightarrow$

$ab+a \underset{5}{\equiv} 4$, $bc+b \underset{5}{\equiv} 4$, $ac+c \underset{5}{\equiv} 4$, $abc \underset{5}{\equiv} 4$.

Это значит, что числа a, b, c, $a+1$, $b+1$, $c+1$ не делятся на 5, следовательно a, b, c могут давать остаток 1, 2, 3 при делении на 5.

Теперь, зная что $abc \underset{5}{\equiv} 4$ и a, b, c дают остатки 1, 2, 3 давайте посмотрим какие тройки остатков нам подходят. Если есть остаток 1 и 2, то третье с остатком 2 (тройка остатков 1; 2; 2). Если есть 1 и 3, то третье с остатком 3 (тройка ост. 1; 3; 3). Если есть остаток 2 и 2, то третий 1 (уже была), если есть 2 и 3, то третий не может быть 1, 2, 3. Если есть остатки 3, 3 то третий 1 (была). Следовательно есть 2 варианта троек остатков 1; 2; 2 и 1; 3; 3

Задача № 7 Лист 4 из 4 Фамилия, имя: Кудряшов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~1) тройка остатков 1, 2, 2. Не умаляя общности, пусть $a \underset{5}{\equiv} 1$. Тогда b и c дают остатки 2. Тогда $bc+b+1 \underset{5}{\equiv} 4+2+1 \underset{5}{\equiv} 2$~~
~~Значит такой тройки остатков быть не может.~~

~~2) тройка остатков 1, 3, 3 Не умаляя общности, пусть $a \equiv 1$. Тогда ab~~
~~$ab+a+1 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot b+1+1 \underset{5}{\equiv} 3+1+1 \underset{5}{\equiv} 5 \underset{5}{\equiv} 0$~~

→ Следовательно, этих тройки остатков тоже не может быть. А это значит, что $p \neq 5$, следовательно простых таких p не существует, а это значит, что частное чисел $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)$ и $abc+1$ не может быть квадратом целого числа

Мы знаем, что $abc \underset{5}{\equiv} 4$, $bc+b \underset{5}{\equiv} 4$, $ac+c \underset{5}{\equiv} 4$ ($ab+a \underset{5}{\equiv} 4$). Перемножим $bc+b$, $ac+c$, $ab+a$.

$(bc+b)(ac+c)(ab+a) \equiv 4 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 4$

$b(c+1) \cdot c(a+1) \cdot a(b+1) \equiv 4$

$abc(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 4$ Т.к. $abc \equiv 4$, то

$(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1$ Если какая-то из троек подходит, то это верно, ~~на это проверим~~

$(1+1)(2+1)(2+1) \underset{5}{\equiv} 2 \cdot 3 \cdot 3 \underset{5}{\equiv} 3$ (т.е. тройка 1, 2, 2 не подх)

$(1+1)(3+1)(3+1) \underset{5}{\equiv} 2 \cdot 4 \cdot 4 \underset{5}{\equiv} 2$ (т.е. тройка 1, 3, 3 не подх)

То есть обе тройки не подходят

Задача № 8 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кузнецов Егор

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Да, может.