10:10–10:12 ; 11:08–11:11 ; 12:02–12:04

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс | 8 |

2. Фамилия | К | У | А | Р | Я | В | Ц | Е | В |

Имя: | Н | И | К | И | Т | А |

Отчество: | А | Л | Е | К | С | Е | Е | В | И | Ч |

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Кировская область

4. Контактный телефон 8 909 135 55 29

5. Контактный электронный адрес nikitkalekud@gmail.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Заметим, что число не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим, т. к. 2-хорошее число – это $n+(n+1)=2n+1 \not\vdots\, 2$, а 4-хорошее это $m+(m+1)+(m+2)+(m+3)=4m+6 \vdots\, 2$. Тогда Вася может получить максимум 4 пятёрки, т. к. чисел от 2 до 6 ровно 5.

Пример на 4 пятёрки:

$45=22+23$

$45=14+15+16$

$45=7+8+9+10+11$

$45=6+7+3+9+10$

Ответ: 4

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Будем считать, что перед нами граф, у которого кружки и ученики — это вершины, а ребро проводится между учеником A и кружком i тогда, когда A посещает i. Пусть учеников n, степень вершины у каждого ученика — x. Будем называть галочкой пару рёбер с одной общей вершиной: $\bigwedge$. Тогда посчитаем число галочек, у которых вершина степени 2 — ученик, а пара вершин степени 1 — кружки. От каждого ученика исходит C_x^2 разных пар рёбер и всего таких учеников n, тогда галочек всего $n \cdot C_x^2$. Так же из условия любая пара кружков является вершинами степени 1 ровно в 3-х галочках, тогда галочек всего ~~...~~ $3 \cdot C_7^2$, т.к. способов выбрать 2 кружка из 7 — C_7^2. Тогда $n \cdot \frac{x(x-1)}{2} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 63$. Делители 63 до 99 и от 7 — это 7, 9, 21. Значит $\left[\begin{array}{l} n=7 \\ n=9 \\ n=21. \end{array}\right.$ Докажем, что $n \neq 7$, $n \neq 9$.

- $n=7$, тогда $\frac{x(x-1)}{2} = 9$ $\quad x^2 - x - 18 = 0$

  $D = 1+72 = 73$ — не точный квадрат, значит $x \notin \mathbb{Z}$, чего не бывает

- $n=9$, тогда $\frac{x(x-1)}{2} = 7$ $\quad x^2 - x - 14 = 0$

  $D = 1+56 = 57$ — не точный квадрат, значит $x \notin \mathbb{Z}$

Ответ: 21 ученик

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Докажем, что для любых a, b, c, подходящих под условие $(a-1)^2 \le b+c+1$.

$a^2 - 2a + 1 \le b+c+1$

$\Updownarrow$

$a^2 \le a+b+c+a$

$\Updownarrow$

$a^2 \le a^2+b^2+c^2+a$

$0 \le b^2+c^2+a$ — И, т.к. $a, b, c \ge 0$.

~~Аналогично~~ Докажем, что если дробь $\frac{a}{b}$ - правильная (или 1) и $x \ge 0$, то

$\frac{a+x}{b+x} \ge \frac{a}{b} \Leftrightarrow ab+bx \ge ab+ax \Leftrightarrow x(b-a) \ge 0$ - истина, т.к. $b \ge a$, $x \ge 0$.

Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} = \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}$

$\frac{(b-1)^2}{b+c+1} \le \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}$

$\frac{(c-1)^2}{a+b+c+1} \le \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}$

$\frac{a^2-a+1}{a+b+c+1} + \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1} + \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1} = \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} =$

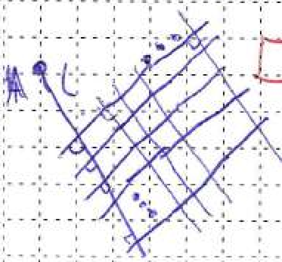
$= \frac{3}{a+b+c+1}$. Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le$

$\le \frac{3}{1+a+b+c}$

Задача № 4 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

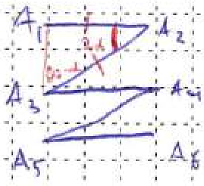
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Докажем, что при $k \geq 251$ пример не строится. Предположим противное. Тогда возьмём любое звено l. ему $\perp$ хотя бы 251 звено, из этих 251 звена $\perp$ ещё хотя бы 250 звеньев (не считая l).



Заметим, что если любые 2 прямые параллельны или перпендикулярны прямым, параллельным или перпендикулярным l, то ломаная незамкнутая? Значит есть звено не параллельное и не перпендикулярное данным звеньям, этому звену перпендикулярно ещё ≥ 251 звено, и каким-то из этих ≥ 251 звена перпендикулярно ещё ≥ 251 звено. Тогда у ломаной уже $251 \cdot 4$ звеньев, что больше 1000.

Пример на $k = 249$. Заметим, что если сделать чертеж вида



где $A_1A_2 \parallel A_3A_4 \parallel A_5A_6$;

$A_2A_3 \parallel A_4A_5$, $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots =$

$= A_5A_6$, то пусть $\angle A_1A_2A_3 = 2\alpha$, тогда

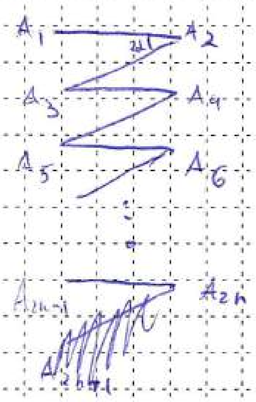
$\angle A_1A_3A_2 = 90^\circ - \alpha$, $\angle A_2A_3A_4 = 2\alpha$, $\angle A_5A_3A_4 = 90^\circ - \alpha$.

Значит $\angle A_1A_3A_5 = 180^\circ$.

Задача № 4 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Тогда сделаем чертёж вида:



$[A_i A_{i+1}] \parallel [A_{i+2} A_{i+3}]$,

$[A_i A_{i+1}] = [A_{i+2} A_{i+3}]$

Значит $A_1, A_3, \ldots, A_{2n+1} \in [A_1 A_{2n+1}]$

$A_2, A_4, \ldots, A_{2n} \in [A_2 A_{2n}]$.

Пусть $A_{2n} = A_{502}$, Тогда

~~Повернём нашу ломаную на 90° и отзеркалим относительно прямой, перпендикулярной $A_1 A_2$. Обрежем 2 крайних звена, чтобы A_{2n} стало A_{500}~~

Проведём из A_{502} звено равное и ~~прямую~~, перпендикулярное ~~A_{2n}~~ $A_2 A_3$, $A_4 A_5$ и т.д., чтобы она пересекала все указанные ~~прямые~~ не звенья! , а её конец не лежал на $A_2 A_3$ (при достаточно маленьком угле 2α это возможно). Теперь проведём из конца получившегося звена ~~прямую~~ (точки A) звено, равное и перпендикулярное $A_3 A_4$, $A_5 A_6$, ..., $A_{500} A_{501}$. Будем проводить последующие части ломаной по заданному алгоритму, так же выберем такой угол $2\alpha_1$ чтобы Почему это возможно?

Расстояние между A и A_1 было ровно $499 A_1 A_2$.

Тогда последнее звено попадёт на A_1. Теперь любое звено перпендикулярно хотя бы ? 249. Да

10;02-10:04; 11:27-11:31; 12:49-12:51

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия КУАРЯВЦЕВ

Имя: НИКИТА

Отчество: АЛЕКСЕЕВИЧ

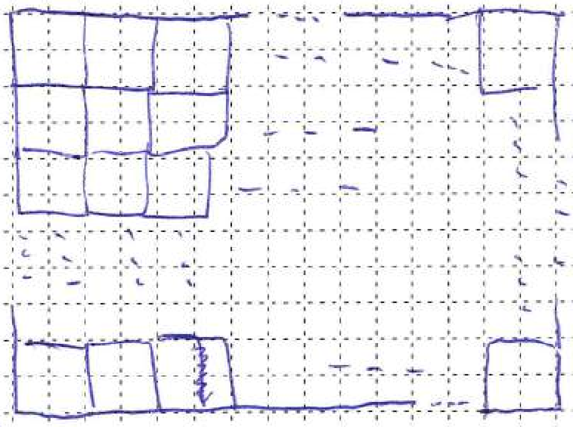
заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Кировская область

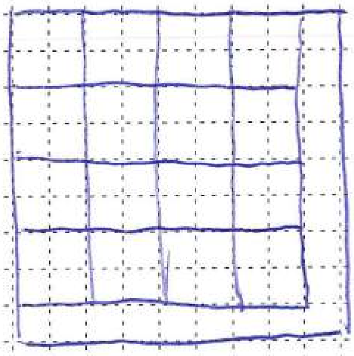
Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разобьём полностью квадрат 30x30 на квадраты 2x2 как на рисунке.



Заметим, что в каждом квадрате 2x2 стоит максимум 1 король, а всего квадратов 2x2 будет $\frac{30 \times 30}{2 \times 2} = 225$. Т. е. пустых квадратов 2x2 не больше 5. Разобьём квадрат 9x9 на 16 квадратов 2x2 и остаток:

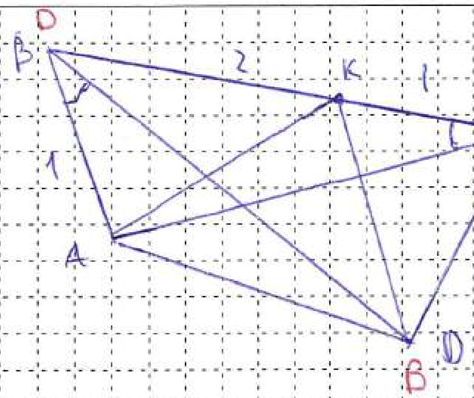


Пусть в этом квадрате 9x9 ≤ 10 королей, тогда квадратов 2x2 без королей только в этом квадрате 9x9 хотя бы 6. А их всего не более 5.

Значит в любом квадрате 9x9 найдется 11 королей.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Отметим на DC ВС
точку K, что $CK=1$, $BK=2$, проведём AK и KD.

С этого момента точки D и B перепутаны

$\triangle AKC = \triangle BAB$, т.к. $AC = BD$ – по условию, $\angle ABD = \angle KCA$ – по условию, $KC = AB = 1$.
т.е. по 2-м сторонам и углу между ними
$\triangle AKC = \triangle DAB \Rightarrow AK = AD$, $\angle AKC = \angle DAB = 150^\circ$.
Значит $\angle AKB = 30^\circ$. Пусть AB не перпендикулярна AK. Тогда опустим высоту BH из B на AK. Значит $BH = 1$, т.к. $\triangle BHK$ – прямоуг., $\angle BKH = 30^\circ$ и $BK = 2$. Тогда наклонная BA равна перпендикуляру BH, что невозможно.
Значит $\angle BAK = 90^\circ$, значит $\angle KAD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. Тогда KAD – равносторонний треугольник, т.к. $AK = AD$, $\angle KAD = 60^\circ$. Тогда $\angle AKD = 60^\circ$.
Тогда $\angle CKD = 90^\circ$, т.к. $\angle AKC = \angle DAB = 150^\circ$, $\angle AKD = 60^\circ$. Значит $\triangle CKD = \triangle BAK$ – по 2-м катетам ($AK = KD$, т.к. AKD – равносторонний).
Тогда $CD = BK = 2$

Ответ: 2

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Пусть~~ ~~$(ab+a+1, abc+1)=d_1$~~ Давайте ~~$(bc+c+1, abc+1)=d_2$~~ поочередно поделим $ab+a+1$, $bc+b+1$ и $ca+c+1$ на $abc+1$. То есть если $(ab+a+1, abc+1)=$ $=d_1$, то вместо скобки $ab+a+1$ запишем $\frac{ab+a+1}{d_1}=x$. Теперь пусть $(abc+1)'=\frac{abc+1}{d_1}$.

Пусть $(bc+c+1, (abc+1)')=d_2$, тогда вместо скобки $bc+b+1$ запишем $\frac{bc+b+1}{d_2}=y$.

Теперь пусть $(abc+1)''=\frac{(abc+1)'}{d_2}=\frac{abc}{d_1d_2}$.

Пусть $((ca+c+1, (abc+1)'')=d_3$, тогда вместо скобки $ca+c+1$ останется $\frac{ca+c+1}{d_3}=z$.

Т.к. $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)\vdots$ $\vdots abc+1$, $\frac{(abc+1)''}{d_3}=1$. Тогда полученное нами частное — это xyz, где $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Пусть $xyz=p^2$. Тогда либо одно из x, y, z — это p^2, а другие 2 — это единица, либо одно из чисел x, y, z — это единица, а другие 2 равны p.

• Рассмотрим первый случай. Не умаляя общности, пусть $z=p^2$. Тогда $x=1$, $y=1$, значит $d_1=ab+a+1$, $d_2=bc+b+1$, то есть $abc+1 \vdots ab+a+1$ и $\frac{abc+1}{ab+a+1} \vdots bc+b+1$.

Тогда $abc+1 \vdots (ab+a+1)(bc+b+1)$.

Задача № 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Николай

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Тогда $abc+1 \geq (ab+a+1)(bc+b+1)$, т.к. $a,b,c \in \mathbb{N}$.
Но $(ab+a+1)(bc+b+1) = ab^2c + ab^2 + ab + abc + ab + a + bc + b + 1$, что больше $abc+1$, т.к. $a,b,c \geq 1$.

• Рассмотрим второй случай, теперь пусть $x=1$, $y=p$, $z=p$. Тогда $d_1 = ab+b+1$, то есть $abc+1 \vdots ab+a+1$. Так же $bc+b+1 = pd_2$ и $ca+c+1 = pd_3$. Тогда
$bc+b-ca-c \vdots p$, т.к. это $p(d_2-d_3)$. Ещё
$abc+ab+a = apd_2$ и $abc+bc+b = pbd_3$. Тогда
$bc+b-ab-a = p(d_3b-d_2a) \vdots p$.

Т.к. $bc+b-ca-c \vdots p$ и $bc+b-ab-a \vdots p$, значит $ab+a \equiv_p ca+c$. Тогда $ab+a+1 \vdots p$, т.к. $ca+c+1 \vdots p$. Значит $abc+1 \vdots p$, т.к. $ab+a+1 \vdots p$, $abc+1 \vdots ab+a+1$. Вспомним, что $abc+bc+b = pbd_3 \vdots p$, тогда $abc+bc+b-(abc+1) = bc+b-1 \vdots p$.
Но $bc+b+1 \vdots p$, значит $2 \vdots p$, то есть p может быть только 2. Но тогда
$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = 4abc+4$.
Так же $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = a^2b^2c^2 + a^2b^2c + a^2bc + a^2bc^2 + a^2bc + a^2c + abc^2 + \underline{abc} + ac + ab^2c^2 + ab^2c + \underline{abc} + abc^2 + \underline{abc} + ac + bc^2 + bc + c + ab^2c + ab^2 + ab + \underline{abc} + ab + a + bc + b + 1$, что равно $4abc +$ (23 слагаемых, не меньших 1), то есть больше $4abc+4$. Тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)\cdot(ca+c+1) / abc+1$ не может быть p^2, где p — простое

Задача № 8 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Проведём все операции выбора 24 гирь из 50. Пусть массы гирь $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{50}$. Будем считать, что выбранные нами 24 гири - это A, а оставшиеся 26 - это $\bar{A}$. Тогда посчитаем ~~ΣA~~ суммы всех A и всех $\bar{A}$.

Пусть число a_i в A, тогда комбинаций в A с a_i - C_{49}^{23}. Пусть число a_j в $\bar{A}$, тогда комбинаций в $\bar{A}$ с a_j - C_{49}^{25}.

Значит $A = (a_1 + \dots + a_{50}) C_{49}^{23}$, $\bar{A} = (a_1 + \dots + a_{50}) C_{49}^{25}$

$$\bar{A} - A = (a_1 + \dots + a_{50})(C_{49}^{25} - C_{49}^{23}) = \left(\frac{49!}{25! \cdot 24!} - \frac{49!}{23! \cdot 26!}\right)(a_1 + \dots + a_{50}) =$$

$$= \frac{49! \cdot 26 - 49! \cdot 24}{24! \cdot 26!}(a_1 + \dots + a_{50}) = \frac{49! \cdot 2}{24! \cdot 26!}(a_1 + \dots + a_{50}).$$

Пусть $a_1 + \dots + a_{50} = S$. Заметим, что ~~A~~ при каждом выборе A мы что-то убираем из $\bar{A}$ (возможно ничего) и получаем A. То есть число раз, когда мы выбрали A равно числу раз, когда мы убрали из $\bar{A}$ что-то. Это число C_{50}^{24}. Тогда, т.к. ~~A~~ всего мы убрали $\frac{49! \cdot 2}{24! \cdot 26!} S$, то был ход, когда мы убрали не меньше, чем

$$\frac{\frac{49! \cdot 2}{26! \cdot 24!} S}{C_{50}^{24}} = \frac{1}{25} S.$$

~~[illegible]~~ Тогда осталось после убирания не больше $\frac{24}{25} S$ - и это 2 каких-то A. То есть какого-то A.

Задача № 8 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Кудрявцев Никита

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

из всех меньше или равно $\frac{12}{25}S$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Покажем, что так быть не может,

доказав, что $a_{50}+a_{49}+\dots+a_{27} > \frac{24}{50}S$. Предположим

противное, тогда $a_{50}+a_{49}+\dots+a_{27} \le \frac{24}{50}S$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Пусть $a_{50}+a_{49}+\dots+a_{27} = \frac{24}{50}S - x$,

тогда $a_1+\dots+a_{26} = \frac{26}{50}S + x$, тогда $a_1+\dots+a_{24} \ge \frac{24}{50}S +$

$+\frac{24}{26}x$. ~~Тогда~~ Заметим, что $a_1+\dots+a_{24} \le a_{28}+\dots+a_{50}$,

т.к. $a_1+\dots+a_{24}$ равно сумме каких-то чисел из

суммы $a_{26},\dots,a_{50}$. $a_{25}+a_{26}+\frac{24}{50}S - x \ge \frac{24}{50}S + \frac{24}{26}x$

$a_{25}+a_{26} \ge \frac{50}{26}x$.

$a_{25} \ge \frac{25}{26}x$

Почему?

?