Задача №1 Лист 1 из 1 Номер участника: 40

Ответ: 4

Пример $n=45$

$n=22+23$

$n=14+15+16$

$n=7+8+9+10+11$

$n=5+6+7+8+9+10$

Оценка

Пусть 5 пятерок

$\Rightarrow n=a+a+1=2a+1$

$n=b+b+1+b+2=\cancel{3b+}\ 3b+3$

$n=c+c+1+c+2+c+3=4c+6$

$n=d+d+1+d+2+d+3+d+4=5d+10$

$n=e+e+1+e+2+e+3+e+4+e+5=6e+15$

$n=2a+1 \Rightarrow n \not\vdots 2 \quad n=4c+6 \Rightarrow n \vdots 2 \quad (?!)$

$\Rightarrow \leq 4$ пятерок

+ КА 7 ЭМ

Пусть в классе учиться N учеников и каждый посещает k кружк

Всего пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2}=21$

$7 \cdot$ к АБ БС

для каждой пары ровно 3 человека посетили оба ⇒ всего „пар посещений кружков учениками" $21\cdot 3=63$

Теперь сколько „пар посещений" создает 1 ученик: $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ ведь из ~~него~~ k посещений и любая пара считается со стороны кружков

$\Rightarrow 63 = N\cdot\frac{k(k-1)}{2}$

$N\cdot k\cdot(k-1)=126$

$N>6 \Rightarrow k(k-1)<21 \Rightarrow k<6$

0) $k=0$

1° $k=1$

$\Rightarrow N=\frac{126}{0\cdot 1}$ (?!) ведь тогда вообще нет пар посещений

2° $k=2$

$N=\frac{126}{2\cdot 1}=63>60$ (?!)

3° $k=3$

$N=\frac{126}{3\cdot 2}=21$

4° $k=4$

$N=\frac{126}{4\cdot 3}=\frac{42}{4}=\frac{21}{2}=10{,}5$ (?!)

5° $k=5$

$N=\frac{126}{4\cdot 5}=\frac{63}{10}=6{,}3$ (?!)

⇒ отсюда $N=21$ и $k=3$

Наверное ~~пример не пресен но~~ ~~приведу~~

Ответ. 21.

Задача № 3 Лист 1. из 1 Номер участника: 40

7 +

Сначала заметим, что:

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq 1$ ведь это $\Leftrightarrow a^2-2a+1 \leq b+c+1$

$\Leftrightarrow a^2 - a \leq b+c+a = a^2+b^2+c^2 \Rightarrow$ V

Лемма пусть дана дробь $\frac{x}{y} \leq 1$, тогда $\frac{x+a}{y+a} \geq \frac{x}{y}$, где $a \geq 0$

Док-во $\frac{x+a}{y+a} \geq \frac{x}{y} \Leftrightarrow xy+ay \geq xy+ax \Leftrightarrow ay \geq ax \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq 1$ V если $a \neq 0$, а если $a=0$, то $\frac{x+0}{y+0} = \frac{x}{y}$

Тогда если мы докажем, что

$$A = \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} + \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} + \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} \leq \frac{3}{1+a+b+c}$$

то мы решим задачу ведь A у леммы больше

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1}.$$

Теперь

$$A = \frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1} \Rightarrow \text{V} \quad \text{ч.т.д.}$$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 40

Оценка на 250.

будем следить за количеством РАЗНЫХ направлений относительно ______

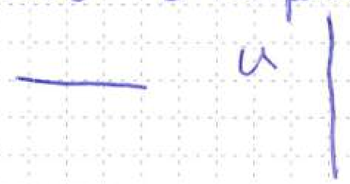
Пусть их ~~k~~ n

1° $n \not\vdots 2$ ⇒ у какого-то направление нет перпендикулярной пары ⇒ $k = 0 \le 250$ ✓

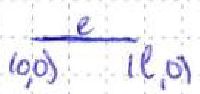
2° $n \vdots 2$

i° $n = 2$

есть 2 направление

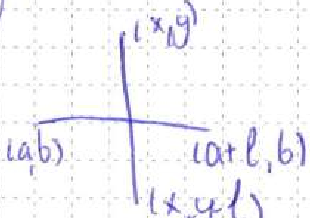


рассмотрим ~~..~~ одно звено



тогда всегда координаты начала и конца вектора $\vdots\, l$

Пусть $k>0$ рассмотрим пересечение:



$\Rightarrow y \vdots l$ и $b \vdots l$ причем $y-l<b$

$y>b$

$\Rightarrow y-b \vdots l$ ~~и $b-y+l \vdots l$~~

$\Rightarrow y \ge b+l \Rightarrow y-l \ge b$ (?!)

$\Rightarrow n \ge 4$

2° $n \ge 4$

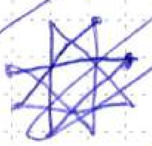
⇒ какого-то направления $x \le \frac{1000}{4} = 250$

⇒ рассмотрим парное к нему, его пересекает $\le x$ раз ⇒ $k \le x \le 250$ ч.т.д.

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 40

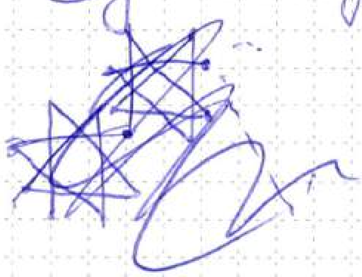
Пример:

~~Рассмотрим такую конструкцию:~~

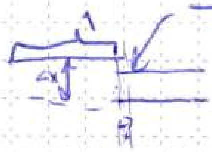


~~тут все отрезки равны это восьмиконечная звезда.~~

~~Теперь на каждом отрезке отметим его середину. тогда по итогу~~



~~250~~



— расположены очень близко, но x то?

— в таких 250

теперь я также выложу и вертикально но

как также?

поверну на 90°, чтобы отрезки были ⊥ построенным

теперь двигаем их вверх и вниз но на расстояния не равны 1, теперь для всех расстояний в силу симметрии картинки ⇒ каждый пересекает 250.

Очевидно что можно сделать расстояния 1, ведь ~~сделаем~~ подвинем первый отрезок, потом второй и т.д

где отрезки двух других направлений?

Оценка ⊙

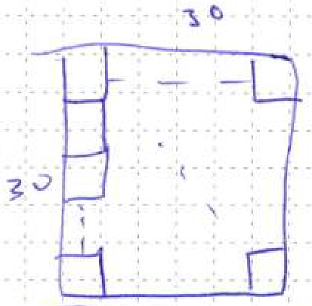
+ ЧН

2 КА

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № ~~4~~ 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 40

Разобьем доску 30×30 на 225 непересекающихся квадратов 2×2



в любом 2×2 не больше 1 короля

7 ЛВ

Теперь пусть в каком-то 9×9 ≤ 10 королей

рассмотрим сколько квадратов полностью в нем:

их $\lfloor \frac{9}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{9}{2} \rfloor = 16$

⇒ всего вне квадрата 9×9 (квадраты не полностью покрытые 9×9) их 209 ⇒ всего в них ≤ 209 королей

⇒ в этих 16 квадратах ≥ 11 королей

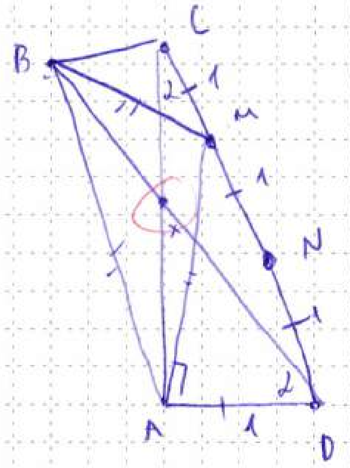
⇒ в 9×9 ≥ 11 королей ч.т.д.

+ УМ

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 40 7

X- пересечение AB и CD

$N, M \in CD \quad CM = MN = ND = 1 = AD$



$\angle ACM = \angle ADB = \alpha$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle MAC$ ($CM = AB$, $\angle ADB = \angle ACM$, $AC = BD$

$\Rightarrow AM = AB$

и $\angle CMA = 150^\circ$

$\Rightarrow \angle AMD = 30^\circ$

$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{MD}{\sin\angle MAD} \Rightarrow \sin\angle MAD = 1 \Rightarrow \angle MAD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAM = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABM$ р/с $\Rightarrow \angle BMA = 60^\circ \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BMC \overset{I}{=} \triangle BMN \Rightarrow BC = BN$

$\triangle BMN \overset{I}{=} \triangle MAD \Rightarrow BC = BN = MD = \underline{\underline{2}}$.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 3 Номер участника: 40

Г Z
УМ ccc

$A=(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=(abc+1)p^2$

1° все 3 скобки $\vdots p \Rightarrow abc+1 \vdots p$ и $p \geq 3$
$(ab+a+1, abc+1) = (abc+ac+c, abc+1) = (ac+c-1, abc+1)$ ведь $abc+c$ $\vdots p$

2° $p=2$

$\Rightarrow A=(abc+1)p^2$ $A > a^2b^2c^2+abc = abc(abc+1)$

$\Rightarrow abc \leq p^2 \Rightarrow abc \leq 1$ 4 опечатка?

$\Rightarrow$ есть 1

НУО $a=1$ $bc<4 \Rightarrow$ НУО $b=1$

$\Rightarrow A=3\cdot(c+2)\cdot(2c+1)=(c+1)\cdot 4$

(?!) $A>(c+1)(6c+3)>(c+1)\cdot 4$ ~~нет~~

3° p входит только в 1 скобку

НУО в 1-ую

$\Rightarrow (bc+b+1)(ac+c+1) \vdots abc+1$ ... $x>abc$ (?..) и что? — надо $>abc+1$

4° $\Rightarrow p$ входит ровно в две скобки

1° в какую-то $\Rightarrow$ во 2-ой

НУО в 1-ую скобку $\Rightarrow abc+1 \vdots p$ и вторая скобка $\vdots p$ либо $\vdots p^2$

1.1° вторая скобка $\vdots p^2$.

$(bc+b+1, abc+1)=(abc+ab+a, abc+1)=(ab+a-1, abc+1)$ $\vdots p$ (?..)

1.2° аналогично

$(ab+a+1, abc+1)=(abc+ac+c, abc+1)=(ac+c-1, abc+1)$?..

2° в обе скобки p входит в 1-ой степени

НУО во 2-ую и 3-ю.

$\Rightarrow abc+1 \vdots ab+a+1 \Rightarrow ac+c-1 \vdots ab+a+1 \Rightarrow (ac+c+1, ab+a+1) \leq 2$.

если он 2 $p\neq 2 \Rightarrow abc+1 \vdots 2 \Rightarrow a,b,c \not\vdots 2 \Rightarrow A \vdots 2$ (?..)

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

$\Rightarrow (ac+c+1, ab+a+1)=1$

и $(ab+a+1, bc+b+1)=1$ отжуда?

$abc+1 \vdots \frac{ac+c+1}{p} \Rightarrow bc+b-1 \vdots \frac{ac+c+1}{p}$

$bc+b-1 \vdots \frac{ac+c+1}{p}$

и $\Rightarrow \left(bc+b+1, \frac{ac+c+1}{p}\right)=1 \Rightarrow (bc+b+1, ac+c+1)=p$

$\Rightarrow bc+b-ac-c \vdots p$

$p \geq abc+ab+bc+ac$

$\Rightarrow bc-ac \geq abc$

перейдем в $F(p)$

$a \underset{ab+a+1}{\equiv} -\frac{1}{bc}$ $b \underset{ab+a+1}{\equiv} -\frac{1}{ac}$ ведь $abc \underset{ab+a+1}{\equiv} -1$

$\Rightarrow ab+a+1 \underset{ab+a+1}{\equiv} 0$ $\Rightarrow -\frac{1}{c}+a \underset{ab+a+1}{\equiv} -1 \Rightarrow ac-1+c \underset{ab+a+1}{\equiv} 0$

еще верно что $ab+a+1 \vdots 2$ ... $ac+c+2 \vdots 2$ ведь $p \neq 2$

$\Rightarrow$ либо $a \vdots 2$ $b \vdots 2$ $c \vdots 2$ иначе $\Rightarrow$?!) ведь $abc+1 \vdots 2$

$\Rightarrow a \vdots 2$ $b \vdots 2$ $c \vdots 2$

$p \geq 4abc$

$\Rightarrow bc+b-ac-c \vdots 2 \Rightarrow bc+b-ac-c \geq 2p$

если $bc+b+1 = ac+c+1=p$ то $ab+a+1=abc+1$

$a=abc-ab$ при $c \geq 2$ (?!) $\Rightarrow c=1 \Rightarrow 2b+1=p$ $\Rightarrow a=0$!?

$\Rightarrow \cancel{(ab+a+1)p \cdot (a+1) \geq ab+1}$

если они равны нер их НОД $\neq p$!?!

$a=2a'$ $b=2b'$ $c=2c'$

$\cancel{(4a'b'+2b'+1)(4b'c'+2c'+1)(4c'a'+2a'+1) = p^2 \cdot 8a'b'c' + 8a'b'c' p^2}$

Задача № 7 Лист 3 из 3 Номер участника: 40

Итого мы знаем

$bc+b+1 \vdots p$ $ac+c+1 \vdots p$

$(ab+a+1, ac+c+1) = 1 = (ab+a+1, bc+b+1)$

$(ac+c+1, bc+b+1) = p$

$a \vdots 2$ $b \vdots 2$ $c \vdots 2$

$abc+1 \vdots ab+a+1$

$abc+1 \vdots \frac{bc+b+1}{p}$

$abc+1 \vdots \frac{ac+c+1}{p}$

$abc+1 = (ab+a+1)\frac{(bc+b+1)(ac+c+1)}{p^2} = (ab+a+1)x$

$ac+c-1 \vdots a$ $ab+b+1$ $bc-b-1 \vdots ab+a+1$

~~$\Rightarrow c - \max$ среди a, b, c~~ почему?

$p \geq \sqrt{abc+ab+bc+ac+1} \Rightarrow \frac{bc+b+1}{p} \leq \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+1$ $\frac{ac+c+1}{p} \leq \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+1$

$\Rightarrow x \leq c \Rightarrow abc+1 \leq abc$ (?!)

$\Rightarrow$ не может

$\frac{bc+b+1}{p} \leq \frac{bc+b+1}{\sqrt{abc+ab+bc+ac+a+1}}$ и аналогично $\frac{ac+c+1}{p} \leq \frac{ac+c+1}{\sqrt{abc+ab+bc+ac+a+1}}$

$\Rightarrow x$ меньше $\frac{abc}{ab+a+1}$ (?!)

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 40

всего $2k$ гирь

Индукция по k.

База. $k=2$

$a_1 \le a_2 \le a_3 a_4$

очевидно a_1 - min $\Rightarrow$ нельзя получить

П: $k \mapsto k+1$

добавили 2 гири пусть в итоге можно дел $2k$?

рассмотрим этот набор и одна из оставшихся

$\overline{n\ n}$

0 КАБ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!