Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

.... - ....
аудитория – посадочное место

41306277
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ ем.	+ МС	+ АБ	
7 АЮ	7 ЕЗ	7 Гк	7 МК	28

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306277 — номер участника

лист 1 из 7

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1.

Ответ: 4

~~Всег~~ Всего возможных знач. k $6-2+1=5$ (т.к. $2 \le k \le 6$).
Пусть можно получить все 5. Но тогда n — это сумма 2х посл. натур. чисел, то есть $x+(x+1)=2x+1$ — нечетно.
В то же время n — это сумма 4х посл. натур. чисел, то есть $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=4x+6$ — четно. Значит, n одновременно четно и нечетно, что невозм. $\Rightarrow$ все 5 пятерок не получить $\Rightarrow$ max 4 пятерки.

Пример: $n=45$

$k=2$: $45=22+23$ $k=3$: $45=14+15+16$ $k=5$: $45=7+8+9+10+11$

$k=6$: $45=5+6+7+8+9+10$ $\Rightarrow$ он получит 4 пятерки.

№2.

Ответ: 21.

~~Пусть в классе n человек, каждый посещает x кружков. Посмотрим на суммарное кол-во Для каждого ученика просуммируем, сколько кружков он n~~

Сделаем двудольный граф. Левая доля — ученики, правая — кружки, ребро — если данный ученик посещает данный кружок. Посмотрим на суммарное кол-во ребер в графе. С одной стороны, ~~ес~~ если в классе n учеников и каждый посещает k кружков, то оно равно nk. Теперь посмотрим на правую долю. Всего пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2}=21$. Для каждых 2х кружков у нас есть 6 ребер, которые в них входят. (3 ученика по 2 ребра). Просуммировав, получим $21\cdot 6=126$. ~~Мы~~ Теперь посмотрим, сколько раз мы посчитали каждое ребро. Мы посчитали его ровно тогда, когда брали этот кружок и к нему в пару любой из $k-1$, который также знает этот ученик. $\Rightarrow$ каждое ребро посчитали $k-1$ раз. Значит, общее число ребер равно $\frac{126}{k-1}$.

Значит, $n\cdot k=\frac{126}{k-1} \Rightarrow n\cdot k\cdot(k-1)=126$.

Заметим, что при $k=1$ это невозм. при $k=2$ $2n=126 \Rightarrow n=63>60$, а по условию $n<60$. При $k=7$, $n\cdot 42=126 \Rightarrow n=3<6$, а по условию $n>6$. ~~Значит, надо~~

Переберем ост. k от 3 до 6. При $k=3$ $n\cdot 6=126 \Rightarrow n=21\in(6;60)$. При $k=4$: $n\cdot 12=126$. Но $126=120+6 \not\vdots 12$. При $k=5$: $n\cdot 20=126$, но $126\not\vdots 20$ (т.к. $126\not\vdots 5$). При $k=6$: $n\cdot 30=126$ ~~Но~~, но $126\not\vdots 30$. Итого, мы получили единств. возможн. вариант $n=21$. Т.к. в условии написано, что такое возможно, то пример приводить не нужно, т.к. мы получили единств. возможный ответ.

Ответ: только 21.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс; 41306277 — номер участника; лист 3 из 7

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№3.

Сначала докажем лемму: ~~пусть~~ пусть ~~n~~ n и m — неотриц. числа и $n \le m$. Тогда для любого неотриц. x верно $\frac{n}{m} \le \frac{n+x}{m+x}$. Д-во:

$\frac{n}{m} \le \frac{n+x}{m+x} \Leftrightarrow n(m+x) \le m(n+x)$ т.к. все числа ≥ 0.

$nm + nx \le mn + mx \Leftrightarrow nx \le mx \Leftrightarrow n \le m$, что правда. Лемма доказана.

Теперь докажем, что при данных ограничениях $(a-1)^2 \le b+c+1$.

$a^2 - 2a + 1 \le b + c + 1$

$a^2 - 2a \le b + c \Leftrightarrow a^2 - a \le \underbrace{a+b+c}_{= a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2 - a \le a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow$
$-a \le b^2 + c^2$. Это правда, т.к. $-a \le 0$ (т.к. $a \ge 0$), а $b^2 + c^2 \ge 0$.

Также $(a-1)^2 \ge 0$ и $b+c+1 > 0$ ($b \ge 0$ и $c \ge 0$).

Тогда выполняются все условия для леммы, т.е. $(a-1)^2 \ge 0$, $b+c+1 > 0$, $(a-1)^2 \le b+c+1$. Значит, выполнено

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2 + a}{a+b+c+1} = \frac{a^2 - a + 1}{a+b+c+1}$. Исходя из аналогичных рассуждений для ост. 2х дробей, получаем

$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{b^2 - b + 1}{a+b+c+1}$ и $\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{a+b+c+1}$.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306277 — номер участника

лист 4 из 7

Тогда

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}+\frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}+\frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{=a+b+c})-(a+b+c)+3}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}, \text{ ч.т.д.}$$

№4.

~~Ответ: 250.~~

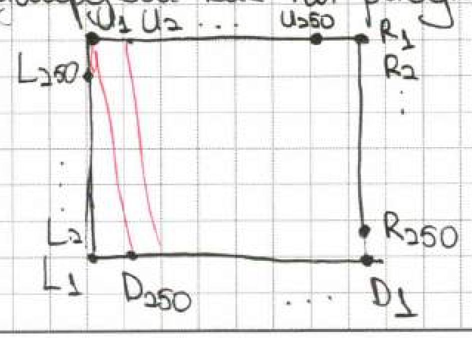
~~Оценка: давайте [зачёркнуто] заметим, что все звенья, перпендикулярные данному, параллельны между собой. Тогда разобьем все ~~звенья~~ звенья на группы параллельных. Тогда, если $k>0$, группы должны разбиться на пары перпендикулярных друг другу. ⇒ их четное число при $k>0$.~~

~~1. Если 2 группы. Будем считать, что это горизонтальные и вертикальные отрезки, иначе повернем картинку на нужный нам угол. ~~Расставим~~ Введем координаты и рассм. самый верхний горизонт. отрезок (с самой большой y-координатой). Если $k\ge 2$, то его должно пересекать ≥ 2 верт. отрезка ⇒ выше него есть ≥ 2 точки - верхние концы 2х вертикальных отрезков. Но тогда из них должен выходить и горизонт. отрезок (2 верт.~~

№4.

Давайте рассм. все звенья, пересекающие под прямым углом конкретное ребро. Заметим, что они все параллельны между собой. Тогда разобьем все звенья на группы параллельных. Если $k>0$, то группы должны разбиться на пары перпендикулярных. $\Rightarrow$ их четное число ≥ 2 групп. Можно считать, что это вертикальные и горизонтальные звенья. Рассм. самое верхнее горизонт. ребро. Его должно пересекать ≥ 1 верт. при $k>0$. Но тогда выше ребра есть верш., из которой точно должно выходить горизонт. ребро, а мы взяли самое верхнее $\Rightarrow$ если $k>0$, то групп ≥ 4.

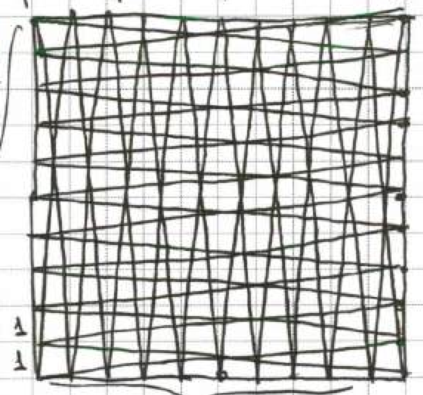
Также заметим, что в любой группе $\geq k$ ~~вершин~~ звеньев?, т.к. иначе A_y ~~вершин~~ звеньев парной группы было бы $\leq k-1$ пересечения. Значит, $4k \leq 1000$ и $k \leq 250$. Теперь приведем пример для $k=250$. Возьмем квадрат размера 250×250. Теперь поделим каждую сторону на 250 частей (отметим по 249 точек на каждой стороне). Занумеруем как на рисунке



Теперь соединим точки $U_1D_{250}, U_2D_{249} \ldots U_{250}D_1$. Соединим $R_1L_{250}, R_2L_{249} \ldots, R_{250}L_1$. Соединим L_1U_2, затем $D_{250}U_3, D_{249}U_4 \ldots D_3U_{250}$, D_2R_1. Соединим L_2D_1, затем ~~U_3D_3, U_4D~~ $L_3R_{250}, L_4R_{249}, \ldots, L_{250}R_3$, U_1R_2. Пример картинки для квадрата $10 \cdot 10$.

(Итоговая ломаная на листе 7).

250



1
1
250

Иначе говоря, сделаем такую змейку ≷, ≶, W..., M.... Наша ломаная – проведенные отрезки (не стороны квадрата).

Заметим, что все отрезки равны (т.к. это диагонали прям. Δ-ка со сторонами 1 и 250), их ровно 1000 (по 250 каждого вида). Осталось разобраться с перпендикулярностью. ~~Отрезки~~ Заметим, что любой отр. \ пересек. с любым / и они перп., также любой отр. / пересек. с любым \ и они перпендикулярны. Каждого вида по 250 ⇒ ~~...~~ здесь $k=250$. Осталось сказать, что это замкнут. ломаная, т.к. у каждой точки степень 2 (у не угловых отсв., и угловых тоже по 2), и также на неё выполн. условия, описанные в задаче.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

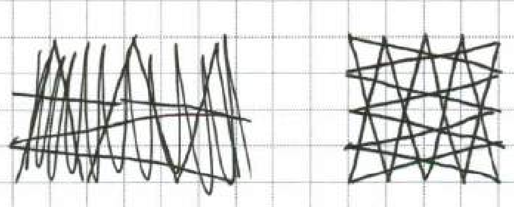
8 — класс

41306277 — номер участника

лист 7 из 7

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Итоговая ломаная (схематично)



Итого, есть оценка и пример на 250.

Ответ: 250.

8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

ГЖЕЛЬ - ....

аудитория – посадочное место

41306277

номер участника

5	6	7	8	Σ
+ АД	+ РХ	+ АЮ	+ • МК	
7 ЧД	7 АЮ	7 ЧД	6 К.Ю	27

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 класс

41306277 номер участника

лист 1 из 8

№5.

Разобъем доску на квадраты 2х2. Их будет $15^2=225$. Заметим, что в любом квадрате 2х2 max 1 король (т.к. иначе короли были бы соседние по стороне или диагонали). Значит, в любом квадрате либо 0 либо 1 король. Значит, в 220 квадр. король стоит => в 225−220=5 не стоит. Теперь рассм квадрат 9·9 ~~Внутри можно выделить квадр 8×8, который разб-но $4^2=16$ квадр 2×2~~ ~~Рассм. самый левый верхний 2х2, который покрыв. его целиком. Заметим, что левее него~~ Заметим, что в любом квадр. 9×9 есть 16 полностью лежащих внутри квадратов 2х2. докажем это, разобрав 4 вар.

4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

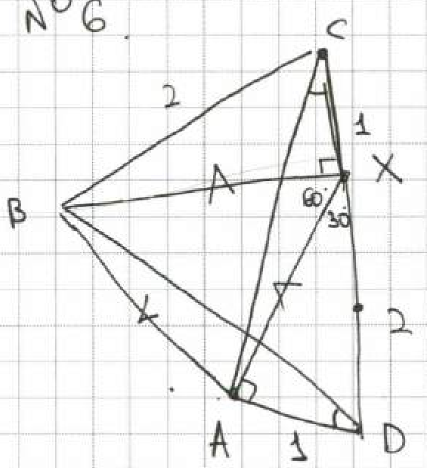
4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

4	5	12	13
3	6	11	14
2	7	10	15
1	8	9	16

4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Всего 4 вар., т.к. положение задается четностью номера строки и столбца. Но среди этих 16 квадр. max в 5 нет короля => в ≥ 11 квадратах есть король => всего ≥11 королей, ч.т.д.

№6.



① Отм. на CD т. X так, что $CX=1 \Rightarrow DX=2$.

② ~~$\triangle BD = CA$ (усл)~~

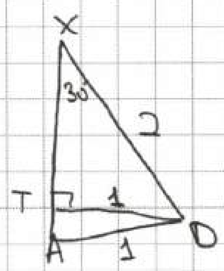
Рассм. $\triangle ABD$ и $\triangle AXC$

~~AB~~ $BD = AC$ (усл.)
$CX = AD = 1$
$\angle ACX = \angle ADB$ (усл.)
$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AXC$ (по 2м ст. и углу м/ними) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AX = AB$, $\angle AXC = \angle BAD = 150^\circ$

③ $\angle AXD = 180^\circ - \angle AXC = 30^\circ$

Рассм. $\triangle AXD$. $AD=1$, $XD = 2 = 2AD$, $\angle AXD = 30^\circ$. Докажем, что $\angle XAD = 90^\circ$. Предположим противное. Тогда опустим перпендикуляр DT на прямую AX. Тогда $\triangle DTX$ - прямоуг. с углом $30^\circ \Rightarrow DT = \frac{XD}{2} = 1$.



~~Но если DA - не пе.~~ Но если A и T не совп., то $TD < DA$ (т.к. гипотенуза всегда больше катета), при этом $DT = DA = 1$.

Противоречие $\Rightarrow$ A и T совп. $\Rightarrow \angle XAD = 90^\circ$, что мы и хотели.

④ Рассм. $\triangle BAX$

$AB = AX$ (п.2)
$\angle BAX = \angle BAD - \angle XAD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$
$\Rightarrow \triangle ABX$ - равност. $\Rightarrow BX = AB = AX$
$\angle AXB = 60^\circ$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306277 — номер участника

лист 3 из 8

⑤ $\angle BXC = \angle CXA - \angle AXB = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

Рассм. $\triangle CXB$ и $\triangle DAX$

$BX = AX$ (п.4)

$\angle BXC = \angle XAD = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle BXC = \triangle XAD$ (по 2м ст. и углу м/ними) $\Rightarrow$

$CX = AD = 1$

$BC = XD$

⑥ $XD = 2$, $BC = XD \Rightarrow BC = 2$

Ответ: 2

№7.

Сначала докажем следующее утверждение:

$$\left.\begin{array}{l} ab+a+1 \,\vdots\, p \\ bc+b+1 \,\vdots\, p \end{array}\right. \Rightarrow ac+c+1 \,\vdots\, p$$

Д-во:

$$\cancel{ab+a \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow a(b+1) \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow a \underset{p}{\equiv} \frac{-1}{b+1}}$$

$$\cancel{bc+b \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow}$$

$$ab+a \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow a(b+1) \underset{p}{\equiv} -1$$

$$bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow b+1 \underset{p}{\equiv} -bc \Rightarrow a\cdot(-bc) \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow abc \underset{p}{\equiv} 1$$

Заметим, что $b \not\vdots\, p$ (т.к. $bc+b+1 \,\vdots\, p$). Значит, если мы докажем, что $abc+bc+b \,\vdots\, p$, то получим требуемое. Но $abc \equiv 1$, $bc+b \equiv -1 \Rightarrow abc+bc+b \underset{p}{\equiv} 0$, что мы и хотели. Назовем это леммой 1.

Докажем лемму 2: Пусть $p \neq 2$ — такое простое число, что ~~abc+1~~ $ab+a+1 \,\vdots\, p$ и $abc+1 \,\vdots\, p$. Тогда ни одна из оставш. скобок ($bc+b+1$, $ac+c+1$) не делятся на p. Док-во:

$$ab \underset{p}{\equiv} -a-1 \Rightarrow \overset{-1}{\overset{\parallel}{abc}} \underset{p}{\equiv} (-a-1)c \underset{p}{\equiv} -ac-c \Rightarrow ac+c \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

$ac+c \underset{p}{\not\equiv} -1$ (иначе $2 \,\vdots\, p$, а $p \neq 2$). Также $a(b+1) \underset{p}{\equiv} abc$.

$a \not\vdots\, p \Rightarrow b+1 \underset{p}{\equiv} bc \Rightarrow bc+b+1 \equiv 2(b+1)$. Если $2(b+1) \,\vdots\, p$, то $b \underset{p}{\equiv} -1$, но тогда $ab+a+1 \equiv -a+a+1 \underset{p}{\equiv} 1$! Против. $\Rightarrow$ лемма доказана.

Также в силу симметрии ~~так лемма~~ верна ~~и для~~ для любых данных скобок.

Теперь заметим, что если $abc+1 \vdots 2$, то a,b,c – нечёт. Но тогда все скобки слева нечёт и их пр-е нечёт, но нечёт $\not\vdots$ чет $\Rightarrow abc+1$ – нечёт. Пусть

$$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=p^2(abc+1)$$

1. $p=2$. Но $ab+a+1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b}$, $bc+b+1 \geq 3\sqrt[3]{b^2c}$, $ac+c+1 \geq 3\sqrt[3]{ac^2} \Rightarrow$ выраж. слева $\geq 27\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=27abc$. Значит если такое возможно, то $27abc \leq 4abc+4$, т.е. $23abc \leq 4$, что явно неверно. Значит, $p \neq 2$. Тогда вся левая часть нечётна (т.к. правая нечётна). Теперь заметим, что если ≥ 2 скобки слева $\vdots p$, то по лемме 1 3-я тоже кратна. Но тогда левая часть $\vdots p^3 \Rightarrow abc+1 \vdots p$. Но такое невозможно по лемме 2, т.к. если $abc+1$ и 1 из скобок $\vdots p$ ($p \neq 2$), то остальные не могут. Значит, лишь 1 из скобок слева $\vdots p$. Значит, есть 2 скобки (НУО $ab+a+1$ и $bc+b+1$), каждая из которых $\not\vdots p$ и $\not\vdots 2$. Но тогда $abc+1$ должно делиться на $ab+a+1$ и $bc+b+1$. Причем $(ab+a+1, bc+b+1)=1$, т.к. если они оба $\vdots q \neq p$, то и $abc+1 \vdots q$, а это невозм. по лемме 2. Значит, $abc+1 \vdots (ab+a+1)(bc+b+1) \Rightarrow abc+1 \geq (ab+a+1)(bc+b+1)$. Но $(ab+a+1)(bc+b+1) > (ab+1)(bc+1) = ab^2c+bc+ab+1 > abc+1$. Противоречие.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Второй день, заключительный этап

8 — класс
41306277 — номер участника
лист 6 из 8

Значит, в любом случае требуемое в задаче невозможно.
Ответ: нет, не может.

№8.

Ответ: нет

Возьмем какие-то 24 гири, но не 24 самые тяжелые. Пусть они равны 26 другим. Но тогда рассм. 24 самые большие. Даже сумма 26 ост. самых маленьких точно меньше, чем сумма изнач. взятых 24 гирь, которые, в свою очередь, меньше 24 самых тяжелых. Значит, такое невозможно. Следовательно, сумме 26 других гирь могут равняться только 24 самых больших гирь. ~~Теперь предположим, что сумма 25 самых маленьких гирь равна какому-то набору из 24х.~~ Теперь упорядочим гири $a_1 < a_2 < \ldots < a_{50}$. Рассм. все наборы $a_{26} \ldots a_{50}$ без одной гири. Тогда если $S_2 = a_{26} + \ldots + a_{50}$, то их веса равны $S_2 - a_{26} > S_2 - a_{27} > \ldots > S - a_{50}$. Также заметим, что любой набор такого вида > max 24 из оставшихся. Значит, набор с такой же суммой должен состоять из ≥ 25 гирь (а если $i \neq 26$, то набор без i-й гирьки будет в паре с набором из ровно 25 гирек).

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306277 — номер участника

лист ~~6~~7 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Теперь рассм. набор с гирями $a_{50}, a_{48}, \ldots, a_4$. ~~К нему в~~ так к нему в паре также будет набор из ≥ 25 гирек $\Rightarrow$ ровно из 25, т.к. он не max. Тогда должно выполняться $a_1+a_2+a_3+\underbrace{a_5+a_7 \ldots + a_{47}}_{\text{с шагом 2}} \leq a_4+a_6+\ldots+a_{50}$.

(т.к. сумма 25 наименьших должна быть $\leq$ чем сумма этих 24, иначе любой набор из 25 гирь будет весить больше). Теперь рассм. все наборы $a_{26} \ldots a_{50}$ из 1 гири, $S_2 = a_{26}+\ldots+a_{50}$. Заметим также, что раз $a_{26} \neq a_{27} \neq \ldots \neq a_{50}$, то все суммы в наборах также будут различны. ~~Водим~~ А теперь посмотрим на наборы в пару к ним (не считая самого большого набора)

1. это набор $a_1 \ldots a_{25}$, причем он может быть в паре только с самым маленьким из наборов (без a_{50}).
2. ~~и~~ мы убрали j-ю гирю из первых 25 и взяли a_i вместо этого. Тогда если $S = a_1+\ldots+a_{25}$, то $S - a_j + a_i = S_2 - a_i \Rightarrow 2a_i - a_j = S_2 - S \rightarrow \text{const}$. Значит, чем $\uparrow a_i$, тем $\uparrow$ должно быть a_j. Тогда рассм. набор без ~~20~~ 30-й гири. К нему в пару будет набор веса $\leq S - a_4 + a_{30} = a_1+a_2+a_3+a_5+a_6+\ldots+a_{25}+a_{30}$.

откуда?

Значит, ~~$a_1+a_2+\ldots$~~ $+ a_{25}+a_{30} \geq a_{26}+a_{27}+\ldots+a_{29}+a_{31}+\ldots+a_{50}$.

$a_1+a_2+a_3+a_5+\ldots$

Итого, имеем систему

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+(a_5+a_7+\ldots+a_{47}) \le a_4+a_6+\ldots+a_{50} \\ a_1+a_2+a_3+a_5+a_6+\ldots+a_{25}+a_{30} \ge a_{26}+\ldots+a_{29}+a_{31}+\ldots+a_{50} \end{cases}$$

Пусть $a_1+a_2+a_3+(a_5+a_7+\ldots)=X$ $\quad a_1+a_2+a_3+a_5+a_6+\ldots=Z$

$a_4+a_6+\ldots+a_{50}=Y$ $\quad a_{26}+\ldots+a_{29}+a_{31}+\ldots=T$

Тогда $X\le Y$ Но мы видим, что $X>Z$ и $T>Y$.

$Z\ge T$. Но тогда $Z<X\le Y<T$, а у нас $Z\ge T$. Противоречие.

Значит, такого быть не может.