РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ЛАЗАРЕВИЧ

Имя: ГРИГОРИЙ

Отчество: АЛЕКСЕЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион РЕСПУБЛИКА ТАТАРСТАН

4. Контактный телефон 89179082705

5. Контактный электронный адрес ______________________

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

если число n является k-хорошим, то оно представляется: $n = p+(p+1)+ \ldots +(p+k-1) = \frac{(2p+k-1)\cdot k}{2}$, где $p \in N$.

Допустим n является 2-хорошим и 4-хорошим $\Rightarrow$ $n = \frac{(2p_1+1)\cdot 2}{2} = \frac{(2p_2+3)\cdot 4}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p_1+1 = 2\cdot(2p_2+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ чётное = нечётное $\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow$ n не может являться 2-хорошим и 4-хорошим одновременно $\Rightarrow$ из $7 > k > 1$ могут подходит ≤ 4 числа $\Rightarrow$ Вася получил ≤ 4 пятерки.

Пример на 4 пятёрки:

$n = 45$.

$45 = 22+23$ (2-хорошее)

$45 = 14+15+16$ (3-хорошее)

$45 = 7+8+9+10+11$ (5-хорошее)

$45 = 5+6+7+8+9+10$ (6-хорошее)

$\Downarrow$

наибольшее кол-во пятёрок = 4.

Задача № 2 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Допустим k учеников и каждый посещает по n кружков. Заведем двудольный граф, где 1-ая доля - кружки, 2-ая доля - ученики и ребро связывает ученика с кружком, если тот ходит в этот кружок.

Посчитаем кол-во конфигураций:

$\to p$

Для любых 2-ух кружков их оба посещают ровно 3 ученика $\Rightarrow p = C_7^2 \cdot 3$

Для каждого ученика C_n^2 пар кружков $\Rightarrow$

$\Rightarrow p = C_n^2 \cdot k \Rightarrow C_7^2 \cdot 3 = C_n^2 \cdot k = p \Rightarrow$

$\Rightarrow k \cdot n \cdot (n-1) = 3^2 \cdot 7 \cdot 2$

$n \in N \Rightarrow$ 1) $n=1 \Rightarrow \varnothing$ $(0 = 3^2 \cdot 7 \cdot 2)$

2) $n=2 \Rightarrow k=63$ ($\varnothing$, т.к. $k<60$)

3) $n=3 \Rightarrow k=21$

4) $n=7 \Rightarrow k=3$ ($\varnothing$, т.к. $k>6$)

5) $n=6 \Rightarrow k=\frac{21}{5}$ $(\varnothing)$

6) $n=9 \Rightarrow k=\frac{7}{4}$ $(\varnothing)$

7) $n=14 \Rightarrow k=\frac{9}{13}$ $(\varnothing)$

8) $n=18 \Rightarrow k=\frac{7}{17}$ $(\varnothing)$

9) $n=21 \Rightarrow k=\frac{3}{10}$ $(\varnothing)$

$n=42$?

10) $n=63 \Rightarrow k=\frac{2}{62}$ $(\varnothing)$

11) $n=126 \Rightarrow k=\frac{1}{125}$ $(\varnothing)$

$\Rightarrow k=21, n=3$

Задача № 2 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

пример на $k=21$: ( ) – набор посещаемых кружков

(1 2 3) – 3 ученика

(3 4 5) – 3 ученика

(3 6 7) – 3 ученика

(1 4 6) – 3 ученика

(1 5 7) – 3 ученика

(2 4 7) – 3 ученика

(2 5 6) – 3 ученика

Ответ: в таком классе 21 ученик.

Задача № 3 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+ac+bc) \leq 3\cdot(a^2+b^2+c^2) = 3\cdot(a+b+c)$$

$$\Updownarrow$$

$$a+b+c \leq 3 \quad (\text{т.к. } a+b+c \geq 0), \text{ то можно поделить}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2+b^2+c^2 \leq 3 \Rightarrow a<2,\ b<2,\ c<2.$$ ок

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = \frac{a^2-2a+1}{b+c+1} = \frac{(b+c+1)-(b^2+c^2+a)}{b+c+1} = 1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} = 3-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}-\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}-$$
$$-\frac{b^2+a^2+c}{b+a+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нужно доказать:

$$\frac{3}{1+a+b+c}+\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}+\frac{b^2+a^2+c}{b+a+1} \geq 3$$

докажем, что $\dfrac{1}{1+a+b+c}+\dfrac{b^2+c^2+a}{b+c+1} \geq 1$

$$\Updownarrow$$

$$ab^2+ac^2+a^2+b^3+c^2b+ab+c^3+b^2c+ac+b^2c^2+a+bc+1 \geq$$
$$\geq ab+b^2+bc+b+ac+cb+c^2+c+a+b+c+1$$

$$\Updownarrow$$

$$c^3+b^3+a^2+ab^2+ac^2+c^2b+b^2c \geq 2bc+b+c \text{ ?}$$ ок

$b+c = a^2+b^2+c^2-a$

$$\Updownarrow$$

$$c^2\cdot(c+a+b)+b^2\cdot(b+a+c)+a^2 \geq 2bc+a^2+b^2+c^2-a$$

$$\Updownarrow$$

$$(c^2+b^2)\cdot(a+b+c)+a \geq (b+c)^2$$

$$\Updownarrow$$

Задача № 3 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$(c^2+b^2)\cdot(c^2+b^2+a^2)+a \geq (b+c)^2$ ок

$\Updownarrow$

$(c^2+b^2)^2-(b+c)^2+c^2a^2+b^2a^2+a\geq 0$

$\Updownarrow$

$(c^2+b^2-b-c)(c^2+b^2+b+c)+c^2a^2+b^2a^2+a\geq 0$

$\Updownarrow$

$(a-a^2)(c^2+b^2+b+c)+a^2c^2+b^2a^2+a\geq 0$

$\Updownarrow$

$a\cdot(c^2+b^2+b+c-\underline{c^2a}-\underline{b^2a}-ab-ac+\underline{c^2a}+\underline{b^2a}+1)\geq 0$

$a\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно поделить

$\Updownarrow$

$c^2+b^2+b+c+1\geq ab+ac$ ок

$\Updownarrow$

$c^2+b^2+1\geq (b+c)\cdot(a-1)$

$\Updownarrow$

$a+b+c-a^2+1\geq (b+c)\cdot(a-1)$

$\Updownarrow$

$1+a-a^2\geq (b+c)(a-2)$ ок

$2>a\geq 0 \Rightarrow$ правая часть отрицательная

Докажем, что $1+a-a^2\geq 0$

$\Updownarrow$

$a^2-a-1\leq 0$

$D=1+4=5$

корни $a_1,a_2=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, причем $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

т.к. $\sqrt{5}>2$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>\dfrac{3}{2}$

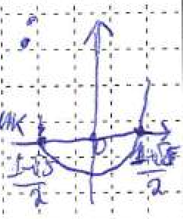
ок

при $a=1$: $a^2-a-1=-1<0 \Rightarrow$ при $a\leq \dfrac{3}{2}$:

$a^2-a-1\leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+a-a^2\geq (b+c)(a-2)$

график



Задача № 3 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Докажем, что $a \le \frac{3}{2}$. Допустим $a > \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = a+b+c$

$\Downarrow$

$a \cdot (a-1) = b \cdot (1-b) + c \cdot (1-c)$

$a > \frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot (a-1) > \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}75 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}75 \le b \cdot (1-b) + c \cdot (1-c)$

Заметим, что $b \cdot (1-b)$ – парабола ветвями вниз $\Rightarrow$ max в вершине $b=0{,}5 \Rightarrow b \cdot (1-b) \le 0{,}25$;

$c \cdot (1-c) \le 0{,}25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}75 \le 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ противоречие.

$\Downarrow$

$a \le \frac{3}{2}$, $b \le \frac{3}{2}$, $c \le \frac{3}{2}$ (доказывается симметрично) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ то что мы доказали для a, работает и для b и c (неравенство симметрично)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+a+b+c} + \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}\right) + \left(\frac{1}{1+a+b+c} + \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}\right) + \left(\frac{1}{1+a+b+c} + \frac{b^2+a^2+c}{b+a+1}\right) \ge 1+1+1 = 3$

что и требовалось доказать

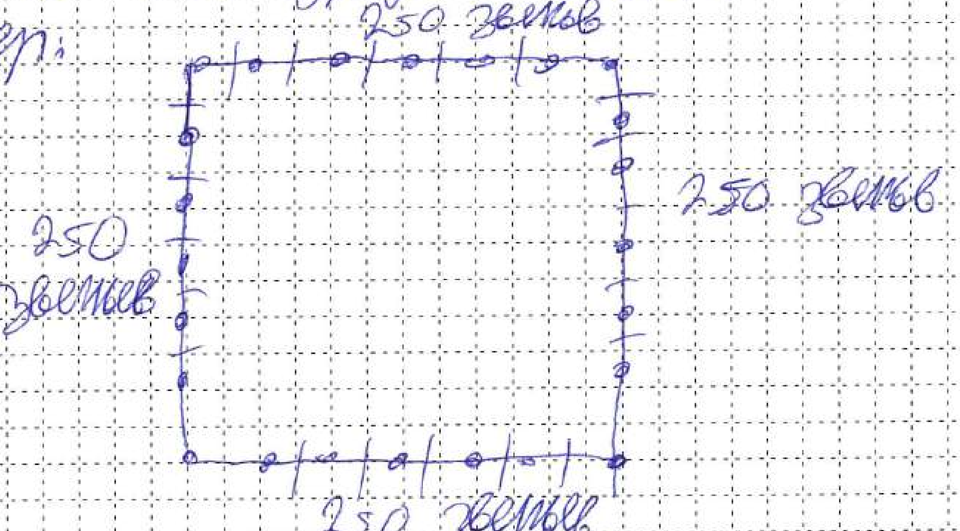
Задача № 4 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Лазаревич, Григорий

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: 499

оценка: посмотрим на звено:
ему перпендикулярны ≥ 499 звеньев $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ему $\parallel$-ы ≥ 498 звеньев.
выделим 2 группы: $\parallel$-ые ему звенья (включая его самого) и $\perp$-ые ему звенья. Заметим, что в одной из групп по принципу Дирихле ≤ 500 звеньев. Без ограничения общности допустим в $\perp$-ых ему. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ посмотрим на звенье, которое ему $\parallel$-но и является соседним с $\perp$-ным. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ оно пересекает под прямым углом $\leq 500-1=499$ других звеньев.

пример:



для 992 звеньев это $\perp$-ны 500 звеньев, а для 8 звеньев это $\perp$-ны 499 звеньев $\Rightarrow$
$\Rightarrow k=499$.

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ЛАЗАРЕВИЧ

Имя: ГРИГОРИЙ

Отчество: АЛЕКСЕЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

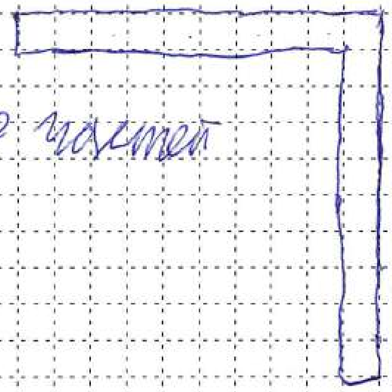
3. Регион РЕСПУБЛИКА ТАТАРСТАН

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

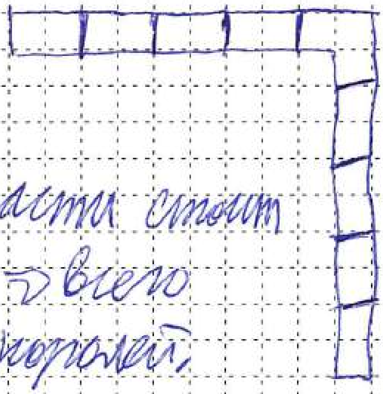
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Допустим найдётся квадрат 9×9 в котором стоит ≤ 10 королей. Обозначим его квадрат X.
Разобьём всю доску на квадраты 2×2.
Заметим, что квадрат X задевает ровно $\frac{10^2}{2^2}=25$ квадратов 2×2. $\Rightarrow$ остаётся

$\frac{30^2}{2^2}-25=200$ нетронутых квадратов 2×2. Заметим, что в каждом таком квадрате стоит не больше 1 короля $\Rightarrow$ на квадратах, которых задевает квадрат X стоит $\geq 220-200=20$ королей.
Т.к. в самом квадрате X стоит ≤ 10 королей, то на оставшихся клетках стоит ≥ 10 королей.



Разобьём эти клетки на 9 частей вот так:



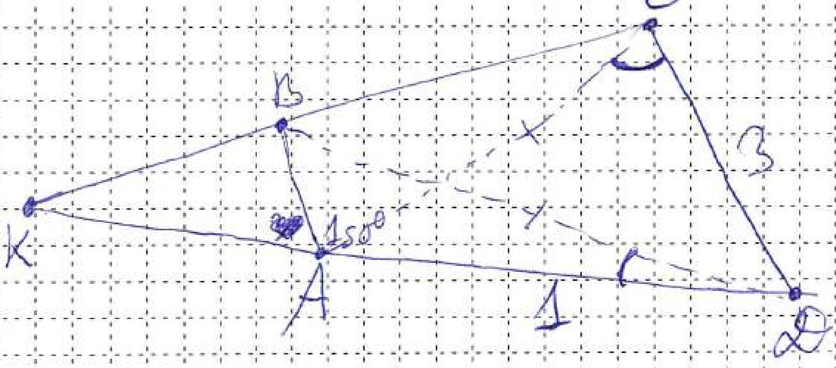
В каждой части стоит ≤ 1 король $\Rightarrow$ всего стоит ≤ 9 королей, и так же ≥ 10 королей. Противоречие.

$\Downarrow$

В любом квадрате 9×9 найдётся ≥ 11 королей.

Задача № 26 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



1) Продолжим отрезок DA на 2 за точку A и получим точку K.

2) $\triangle KBD = \triangle CAD$ (по 2 сторонам и углу между)

$\Downarrow$

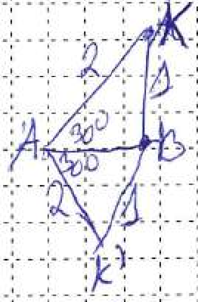
$KB = AD = 1$

3) $\angle KAB = 180^\circ - \angle BAD = 30^\circ$ (смежный)

$\Downarrow$

В $\triangle$-ке KBA KA в 2 раза больше KB и $\angle KAB = 30^\circ$.

Докажем, что $\triangle$-ик KBA – прямоугольный.



Отложим точку K' симметрично точке относительно AB $\Rightarrow AK' = AK = 2$, $BK' = KB = 1$, $\angle BAK' = \angle KAB = 30^\circ$.

$\triangle$-ик AKK' – р/б, содержащий $60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle$-ик AKK' – р/с и $KK' = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по неравенству ~~[illegible]~~ $\triangle$-ка если K, B и K' не на одной прямой, то ~~[illegible]~~

$1+1 > 2$. Противоречие. $\Rightarrow K, B, K'$ – на одной прямой $\Rightarrow \angle ABK = 90^\circ$ (высота)

Задача № 6 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

4) $\angle BKA = 180^\circ - \angle KBA - \angle KAB = 60^\circ$

5) $\triangle KBD = \triangle CAD \Rightarrow \angle ADC = 60^\circ$

6) $\triangle KCD$ – р/б и в нём $\angle KDC = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle KCD$ – р/с, $\angle CKD = 60^\circ$, $KC = 3$

7) $\angle CKD = 60^\circ$, $\angle BKD = 60^\circ \Rightarrow C, B, K$ на одной прямой

8) $CK = 3$, $BK = 1 \Rightarrow CB = CK - BK = 3 - 1 = 2$

Ответ: $CB = \cancel{1}\ 2$

Задача № 7 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Допустим, что их частное - квадрат простого числа p. $\Rightarrow$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=(abc+1)\cdot p^2$

1) в левой части одна скобка $\vdots p^2$.

Без ограничений общности допустим

$ab+a+1 \vdots p^2 \Rightarrow abc+1 \vdots (bc+b+1)(ac+c+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow abc+1 \geq (bc+b+1)(ac+c+1) = c^2ab+bc^2+\ldots+1$

$\Downarrow$

$abc \geq c^2ab+bc^2 \Rightarrow a \geq ac+c = c\cdot(a+1)$

$c \geq 1$. Противоречие

2) в левой части две скобки $\vdots p$.

Без ограничений общности допустим

$ab+a+1 \vdots p$
$bc+b+1 \vdots p$
$\Rightarrow (a+1)(b+1) \equiv b \pmod p$
$(b+1)(c+1) \equiv c \pmod p$

~~[illegible]~~

И 1. $(a+1) \not\vdots p$, $(b+1) \not\vdots p$, $(c+1) \not\vdots p$ (допустим)

$(b+1) \equiv \frac{b}{a+1} \equiv \frac{c}{c+1} \pmod p \Rightarrow$

$\Rightarrow b\cdot(c+1) \equiv c\cdot(a+1) \pmod p$

$\Downarrow$

$b\cdot(c+1)+1 \equiv c\cdot(a+1)+1 \pmod p$

$\Downarrow$

$bc+b+1 \equiv ca+c+1 \pmod p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все 3 скобки $\vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow abc+1 \vdots p \Rightarrow$

Задача № 7 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$\Rightarrow \begin{cases} abc+1 \vdots p \\ ac+c+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow abc+1 \equiv ac+c+1 \pmod p$

$\Downarrow$

$abc \equiv ac+c \pmod p$

$\Downarrow$ (c не делится на p, т.к. $ac+c+1 \vdots p$)

$ab \equiv a+1 \pmod p$

$\Downarrow$

$ab-a-1 \vdots p$

и

$ab+a+1 \vdots p$

$\Downarrow$

$2\cdot(a+1) \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow p=2$ (мы пока что предположили, что $(a+1) \not\vdots p$)

$\Downarrow$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = 4\cdot(abc+1)$

в 1) мы доказали, что $(bc+b+1)(ac+c+1) > abc+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 > ab+a+1 \Rightarrow a=1, b=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot(c+2)\cdot(2c+1) = 4\cdot(c+1)$

$3(2c+1) \not\vdots 2 \Rightarrow c+2 \vdots 2 \Rightarrow c$ – чётное $\Rightarrow$

$\Rightarrow abc+1 = c+1 \not\vdots 2$ Противоречие

3) $(a+1)$ или $(b+1)$ или $(c+1)$ $\vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ без ограничения общности допустим $a+1 \vdots p \Rightarrow$ ~~$a+1 \vdots 2$~~

$\Rightarrow ac+c+1 = (a+1)c+1 \not\vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ab+a+1 \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a+1)(b+1) \equiv b \pmod p \\ (b+1)(c+1) \equiv c \pmod p \end{matrix} \Rightarrow$

Задача № 4 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$\Rightarrow b \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow b \vdots p \Rightarrow c \equiv 1 \cdot (c+1) \pmod{p}$

$\Downarrow$ ~~$c \equiv c+1$ отп~~

$0 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1$, 1 – не простое

$\Downarrow$

противоречие.

Задача № 8 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: ЛАЗАРЕВИЧ, ГРИГОРИЙ

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Да, такое может случиться.

Пример: веса гирь — это все целые числа от 545 до 624 включительно.

(50 различных весов)