Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 41 7 АСи

у | н

Ответ: 4

Оценка: от противного

∃ можно больше ⇒ у Васи ≥ 5 пятерок, но учитель ставит пятерки за к от 2 до 6 ⇒ максимум 5 ⇒ Вася получил ровно 5 пятерок ⇒ число $n$ представимо как сумма 2; 3; 4; 5; 6 посл. чисел

$\Rightarrow n = x+(x+1) = 2x+1 = y+y+1+y+2 = 3y+3 = z+z+1+z+2+z+3 =$
$= 4z+6 = m+m+1+m+2+m+3+m+4 = 5m+10 = f+f+1+f+2+f+3+f+4+f+5 =$
$= 6f+15$. $n = 2x+1 \Rightarrow n \not\vdots 2$, $n = 6f+15 \Rightarrow n \not\vdots 2$, $n = 4z+6 \Rightarrow$
$n \vdots 2$ (?!) ⇒ либо $n$-не представимо в виде 2 и 6 слаг, либо в виде 4 ⇒ что-то точно не подходит ⇒ кол-во „5" он меньше max = 5, хотя бы на 1 ⇒ кол-во „5" ≤ 4, (?!)

Пример на 4:

$$n = 45 = \overbrace{22+23}^{2} = \overbrace{5+6+7+8+9+10}^{6} = \overbrace{7+8+9+10+11}^{5} = \overbrace{14+14+15}^{3}$$

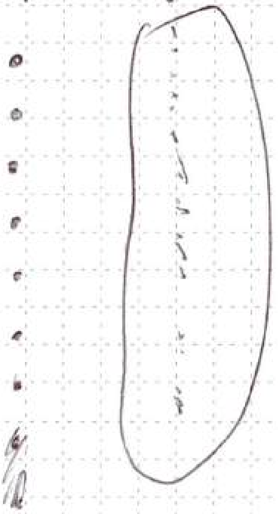
на 4 получилось ✓

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 41 41?

$\exists n$ - кол-во людей.

Представим людей, кружки и посещения ~~их~~ как двудольный граф (где вершины люди и кружки, а посещения ребра)



Заметим что из условия ~~мы~~ мы можем найти кол-во ребер (но мы будем считать ~~несколько~~ все ребра по нескольку раз), для этого найдем кол-во способов взять 2 кружка из 7. $C_7^2 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$. На эти 2 кружка ведут 3 человека по 2 ребра от каждого. Заметим, что при сложении всех ребер (входящих) мы получим всех выходящих таким образом умноженное на количество $r$ ? (где $r$ это ~~всех~~ кол-во способов выбрать из выходящих из 1 вершины $y$ ребер 2 ребра ~~и для~~ эти 2 ребра будут вести в одну из тех 21 пар кружков)

$r = \frac{y(y-1)}{2} \Rightarrow$ ~~...~~ $6\cdot 7\cdot 3$

$n \cdot y(y-1) = 126 = 21\cdot 2\cdot 3 = 7\cdot 3\cdot 2\cdot 3 = \ldots = 2\cdot 3\cdot 21$ $1\cdot 2\cdot 63$

почему?

$\Rightarrow$ $n$ либо 3 либо 21, но $n \neq 6 \Rightarrow n \neq 3 \Rightarrow n = 21$

Ответ: 21

+ ДВ ЧВ

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$ Найдем max знач $a$ оно точно $\geq 1$ $\Rightarrow$

НУО $\exists a \geq b \geq c$

$a^2 \geq a$. $\Rightarrow$ при увеличении $a$ разница $a^2-a$ увел. при $a \geq 1$

$a^2-a = \cancel{b^2+b}\ b+c-b^2-c^2 = b(1-b)+c(1-c)$,

$b(1-b)$ - max, при $b=1-b \Rightarrow b=0{,}5$, аналог., $c=0{,}5 \Rightarrow$

+ ИМ

7

ДП

$\Rightarrow a^2-a=0{,}5 \Rightarrow a^2-a-0{,}5=1$ $a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \leq 2$

$a<2 \Rightarrow b<2,\ c<2$

Заметим $a-1, b-1, c-1<1 \Rightarrow (a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2<1$

Т.к. а-огр $a, b, c \geq 0 \Rightarrow (a-1), (b-1), (c-1) \geq -1 \Rightarrow$

$(a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2 \leq 1$

$b+c+1, c+a+1, a+b+1 \geq 1$, т.к. $a, b, c \geq 0 \Rightarrow$

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq 1$, т.к. $\underline{(a-1)^2 \leq 1}$, $b+c+1 \geq 1$ аналогич. $\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \leq 1$,

$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq 1$.

Заметим, что если $\frac{a}{b} \leq 1$, $a \geq 0, b \geq 0$, $z \geq 0 \Rightarrow \frac{a+z}{b+z} \geq \frac{a}{b}$,

т.к. $\frac{a+z}{b+z}-\frac{a}{b}=\frac{(a+z)b-(b+z)a}{(b+z)b}=\frac{zb-za}{(b+z)b}=\frac{z(b-a)}{(b+z)b} \geq 0$ ✓

тогда мы можем прибавлять к числителю и знаменателю любое полож. число и нер-во будет только усиляться (т.к. каждое слагаемое $\leq 1$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{b+c+1+a}+$$

$$+\frac{(b-1)^2+b}{c+a+1+b}+\frac{(c-1)^2+c}{a+b+1+c}=\frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{a+b+1+c}=$$

$$=\frac{3+(a^2+b^2+c^2-a-b-c)}{a+b+1+c}\ge\frac{3}{a+b+1+c}\quad\text{ч.т.д}$$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 41

Ответ: 250

Оценка: От противного $\exists k > 250 \Rightarrow k \geq 251$

это отрезки пересекают

$\geq 251$ ребро но ребра не они могут пересекаться где нем

Заметим что не все отрезки параллельны или перпенд друг другу, потому что если все то мы (либо ответ 0)

можем найти самый низкий горизонт. отрезок (для этого повернем ломанную по границам клетки)

если этот отрезок кто-то пересекает то ниже его есть вершина $\Rightarrow$ либо он не самый низкий $\Rightarrow$ ?!,

либо звено из этой вершины идет не горизонтально (вертикально не может т.к иначе верш. 1-го отрезка будет на другом ?!)

$\Rightarrow$ в графе не все отр перпенд, паралел друг другу $\Rightarrow$ если хотя бы 2 вида ребер (1 вид ребра паралелен или перпенд своему же виду ребра $\Rightarrow$ каждое ребро пересек $\geq 251$ ребер $\Rightarrow \geq 251$ ребер „верт" 1-го вида и $\geq 251$ ребер „горизонт" 1-го вида и по стольку же 2-го вида $\Rightarrow$ ребер $\geq 1004$ ?!

+
АГ

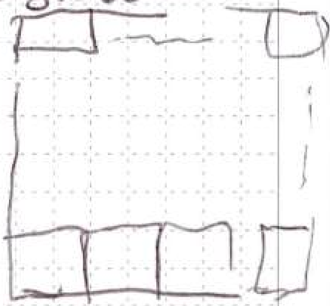
2
НФС

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 41

7

+

Заметим что в любом квадрате 2 на 2 не больше 1-го короля иначе они бьют друг друга. Разобьем доску 30 на 30 на $15 \cdot 15 = 225$ кв $2\times2$:



в квадрате максимум 1 король $\Rightarrow$ максимум 225 королей на доске. Расставили 220 королей

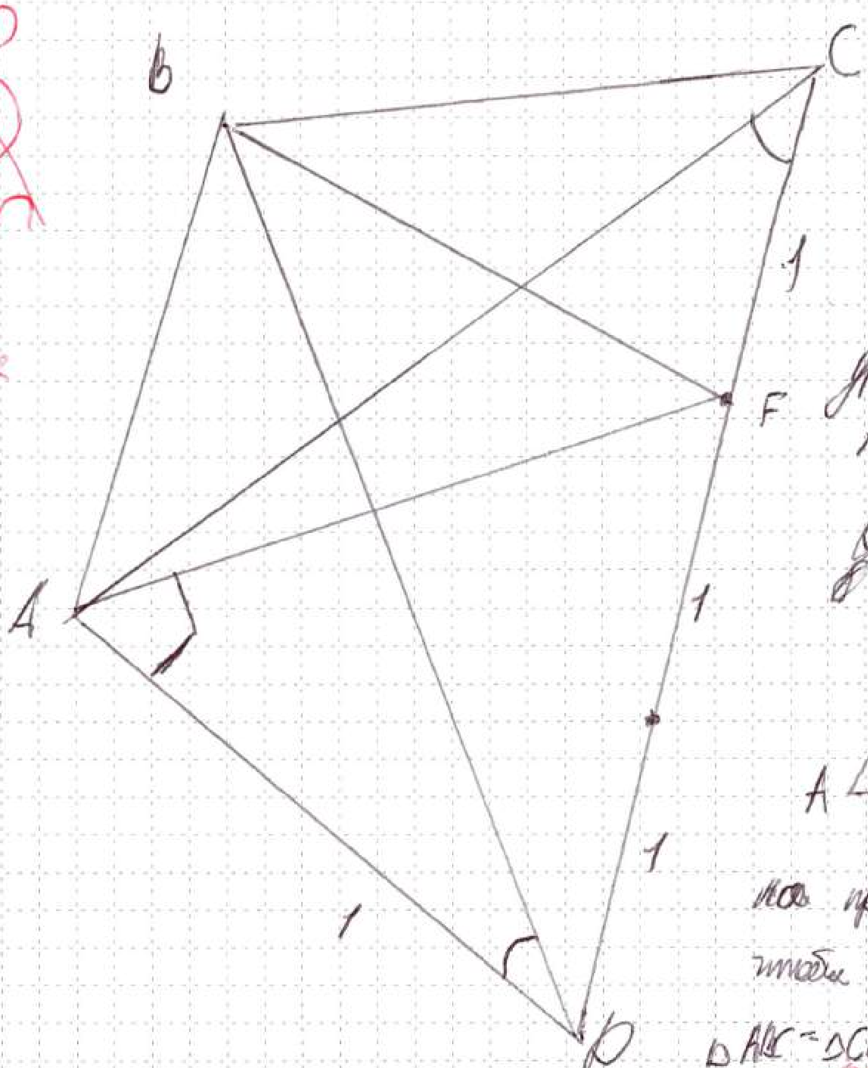
король в 1 кв $2\times2$ $\Rightarrow$ не пустых кв хотя бы 220 $\Rightarrow$

пустых кв. максимум 5 $(225-220)$. Заметим что в любом квадрате 9 на 9 есть хотя бы 16 полных выделенных нами ранее квадратов $2\times2$, потому что возьмем нижнюю клетку кв 9 на 9: 1° это нижн. клетка одного из кв $2\times2$, тогда мы можем сказать что мы можем подняться на 8 кл – это будет верхняя грань и по высоте кв. $(2\times2)$, сдвинемся вправо на 8 это будет правая грань у квадрата на длине. $\Rightarrow$ у нас 4 кв по высоте $(2\times2)$ и 4 кв по длине $(2\times2)$ $\Rightarrow$

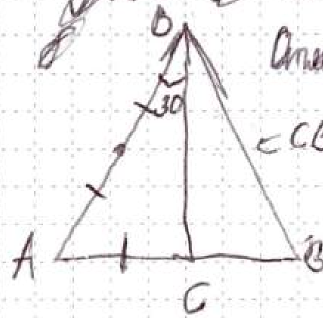
всего квадратов 16 $(2\times2)$. 2°, 3° сдвинемся вправо или вверх возможно и то и то. и мы увидим самый левый и нижний кв (его левую нижнюю грань.) Заметим что такие кв 2 на 2 $\Rightarrow$ нам достаточно 1 шаг вправо или влево чтобы найти эту грань этого кв $(2\times2)$ $\Rightarrow$ у нас остается запас в 8 клеток и мы все еще найдем полных 16 кв $(2\times2)$. Итого макс. число пустых кв $(2\times2)$ 5, число кв $(2\times2)$ в кв. $9\times9$ 16 $\Rightarrow$ не пустых кв $2\times2$

$\geq 16-5=11$ $\Rightarrow$ в с.л. в каждом не пустом кв $2\times2$ 1 король $\Rightarrow$ королей в кв $9\times9$ $\geq 11$ ч.т.д.

~~6~~ ДП
7 Ек




Лемма: Если в Δ напротив угла в 30° лежит сторона в 2 меньше другой стороны этого Δ, то Δ - прямоуг. и ~~угол~~ 90° лежит напротив меньшей стороны угла




Отметим угол $\angle CBB' = \angle ABC$, проведем прямой CB, отметим на прямой $BB'$ (·)$B'$, так, чтобы $BB' = AB = 2AC$. Тогда $\Delta ABC = \Delta CBB'$ (т.к. BC - общ, $AB = BB'$, $\angle ABC = \angle CBB'$) $\Rightarrow \Delta ABB'$ - р/б с углом $\angle ABB' = \angle ABC + \angle CBB' = 60°$, $AC = B'C$

$\Rightarrow \Delta ABB'$ - р/ст Δ $\Rightarrow$ BC - мед, высота и бис-са (т.к. $AC = CB' \Rightarrow$ C - середина $AB' \Rightarrow$ BC - мед)

нужно пояснить почему $C \in AB'$

$\Rightarrow \angle ACB = 90$ ч.т.д.

Ответ: 2

Решение:

Отметим (·)F на CD, чтобы было равно 2, а $CF = 1 = AD$. $AC = BD$ (из усл), $\angle ADB = \angle ACD$ (из усл) $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACF \Rightarrow BA = AF$ B,

$\Delta ABD = \Delta FAC$

$\angle AFC = \angle BAD = 150 \Rightarrow \angle AFD = 30$ $(180 - \angle AFC)$ $\Rightarrow \Delta AFC$ - по лемме прямоугольный ($\angle FAD = 90°$)

AFD $\angle AFD = 30$

$\Rightarrow$ по теор. Пифагора в $\Delta AFD$: $AF^2 = FD^2 - AD^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AF = \sqrt{3}$

$\angle ABF = \angle BAD - \angle FAD = 150 - 90 = 60$. $\Rightarrow$ в $\Delta BAF$ $AF = BF$, $\angle ABF = 60 \Rightarrow$

$\triangle BAF$ - р/сш $\Rightarrow$ $AB = BF = AF = \sqrt{3}$, , $\angle BFA = 60$. $\Rightarrow \angle BFC = 180 -$

$- \angle BFA$ $\angle AFD = 180 - 30 - 60 = 90$

$\triangle BCF$ - прямоуг., $BC$ - гипотенуза $\Rightarrow$ $BC^2 = BF^2 + CF^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 =$

$= 4 \Rightarrow BC^2 = 4 \Rightarrow BC = 2$

Ответ: $2 = BC$

+. КА

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 41

От противного

$p$ - наше простое число

$( (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)p^2 )$

7nn

Заметим, что любые 2 скобки при перемнож. больше чем $abc+1$ $(ab+a+1)(bc+b+1) = ab^2c+1 \ldots$, $(a,b,c \geq 1)$

$\Rightarrow$ одна скобка точно не может делиться на $p^2$ $\Rightarrow$

делятся 2 скобки НУО $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow$

$xp = ab+a+1$, $bc+b+1 = yp \Rightarrow (abc+1) = xy(ca+c+1)$, $y, x$ — натур. $\Rightarrow$

$abc+1 \vdots ca+c+1 \Rightarrow \underbrace{(ca+c+1)b - abc-1}_{\vdots ca+c+1 \quad \vdots ca+c+1} = bc+b-1 \Rightarrow \vdots ca+c+1$

$\begin{cases} ab+a+1 \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc+ac+c \vdots p \\ abc+ba+a \vdots p \end{cases} \Rightarrow ca-ab+c-a \vdots p$

$ab-bc+a-b \vdots p$, $\begin{cases} ca-ba+c-a \vdots p \\ ab-bc+a-b \vdots p \end{cases} \Rightarrow$

$bc-ac+b-c \vdots p$, $\begin{cases} bc-ac+b-c \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow ca+c+1 \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} bc+b-1 \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{cases}$ $(bc+b-1 \vdots ca+c+1)$ ?

+ MM

$p = 2$, иначе противоречие.

1° все неч $\Rightarrow$ скобки левой части в неч, а $abc+1$ чет?!

2° 1, 2 неч. $\Rightarrow abc$ - неч, но как мы знаем $ca+c+1 \vdots p$, $abc+1 \vdots ca+c+1 \Rightarrow abc+1 \vdots p \Rightarrow abc+1$ чет!!