Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 46

Ответ: 4

Оценка:

Давайте заметим, что сумма 6 посл натур. чисел всегда нечетн. т.к среди них есть 3 нечётн и 3 четн. числа ✓

Сумма любых 4ех посл. натур. чисел всегда чётна т.к среди них есть 2 четных и 2 нечетных числа ✓

⇓

Число n не может представляться одновр. в виде суммы 4ех посл и 6и посл.

⇓

Вася получил ≤ 4ех пятерок ✓

Пример на 4

n = 45

6 посл: 5 6 7 8 9 10   5+6+7+8+9+10 = 45

5 посл: 7 8 9 10 11   11=5+6

3 посл: 14 15 16

2 посл: 22 23

⇓

Ответ: 4

+ ТМ

7 КА

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 2 Номер участника: 46

Ответ: 21 верш. - ученики Рёбра?

~~Оценка~~

У нас 7 кружков. Способов выбрать пару кружков

$\frac{6\cdot 7}{2} = 21$ сп.

1° У каждой верш. ст. 1. Тогда ни для какой пары кружков нет 3ех учеников, котор. посещ. их оба т.к. каждый посещ. 1 кружок

2° У кажд верш ст. 2

Тогда всего пар 21. Для каждой есть 3 ученика и каждый ученик участв. только в 1ой паре $\Rightarrow \frac{21\cdot 3}{1}$ учеников $= 63 > 60$

3° У каждой верш. ст. 3

~~Каждый~~ 21 пара. Для каждой пары 3 ученика

Для каждого ученика 3 пары 1-2; 2-3; 1-3

$\frac{21\cdot 3}{3}$ учеников $\Rightarrow$ 21 ученик

Пример:

Пронумеруем кружки: 1, 2, 3 ... 7

Тогда кажд. ученик задаётся 3емя кружками в которые он ходит

123
145
167
246
257
347
356

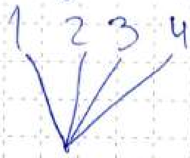
Это ученики, каждого по 3 штуки.
Среди ~~них~~ них кажд. пара встречается ровно 1 раз и кажд. уч. по 3 шт.
Для кажд. пары ровно 3 уч. $\Rightarrow$ пример

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 2 из 2 Номер участника: 46

4° у кажд. верш. ст. 4

Тогда 21 пара, для каждой пары 3 ученика, каждый ученик содерж. в $\frac{4\cdot 3}{2}$ парах (6) т.к.



1-2 2-3 3-4 1-3 1-4 2-4

учеников $\frac{21\cdot 3}{6} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ невозм.

5° у кажд. верш. ст. 5.

21 пара, для кажд. 3 ученика, кажд. уч. содерж. в $\frac{5\cdot 4}{2}$ парах

Учеников: $\frac{21\cdot 3}{10} \notin N \Rightarrow$ невозм.

6° у кажд верш. ст. 6

21 пара, для кажд пары 3 уч.

Каждый ученик в $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ парах

Учеников: $\frac{21\cdot 3}{15} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ невозм.

7° у кажд. верш. ст. 7

21 пара, для кажд. пары 3 уч.

Каждый ученик содерж в $\frac{6\cdot 7}{2} = 21$ паре

Учеников $\frac{21\cdot 3}{21} = 3 < 6 \Rightarrow$ невозм.

Подходит только случай, когда у кажд. верш. ст 3, пример на 21 приведён ч.т.д.

Задача № 3 Лист 1 из 2 Номер участника: 46

(1) $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$ $a,b,c\ge0$

Если $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\le\frac{1}{1+a+b+c}$, $\frac{(b-1)^2}{c+a+1}\le\frac{1}{1+a+b+c}$, $\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{1}{1+a+b+c}$, то нер-во выполн.

Тогда допустим 1 из этих нер-в неверно

НУО $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}>\frac{1}{1+a+b+c}$

$(a-1)^2>\frac{b+c+1}{1+a+b+c}$

$a^2-2a+1>\frac{a+b+c+1}{a+b+c+1}-\frac{a}{a+b+c+1}$

$a^2-2a>-\frac{a}{a+b+c+1}$

$a+b+c+1\ge1$

$a^2-2a>-a$ т.к. чем меньше $a+b+c+1$, тем меньше $-\frac{a}{a+b+c+1}$

$a^2-a>0$

$a(a-1)>0$

$a>1$

$a+b+c+1\ge2$

$a^2-2a>-\frac{a}{2}$

$a^2-1,5a>0$

$a(a-1,5)>0$

$a>1,5$

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$

Если $a>1,5$, то $a(a-1)\ge1,5\cdot0,5=0,75$

$0,75+b^2+c^2\le b+c$

$0,75\le b(1-b)+c(1-c)$

$x(1-x)$ при $x>1$ $x(1-x)\le0$, при $x<1$ $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ т.к.

7им

+ п п

Задача № 3 Лист 2 из 2 Номер участника: 46

~~*: Если сбл. х сохр. суммы~~

Если сбл. числа x и $1-x$ с сохр. суммы, то их произв. возрастает $\Rightarrow$ max знач. при $x = 0{,}5$

$0{,}5 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$0{,}75 \leq b(1-b) + c(1-c) \leq \frac{1}{2} = 0{,}5$

$0{,}5 \geq 0{,}75$ (?!)

$\Downarrow$

Каждое из 3ёх нер-в верно $\Rightarrow$ общее нер-во верно

ч.т.д.

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 46 ОАЦ

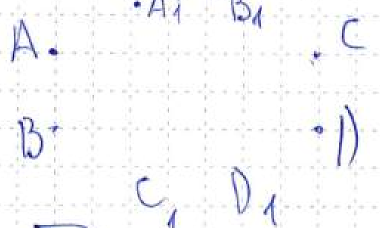
— С6

Ответ: $k=2$

Пример:

Давайте построим правильный 1000-уг.

Тогда в нём будут ~~в~~ четверки таких верш. A, B, C, D, что $AB \parallel CD$ $AC = BD$ и A_1, B_1, C_1, D_1,



такие, что $B_1D_1 \parallel A_1C_1$ $B_1D_1 = AB = CD = A_1C_1$ и $A_1C_1 \perp AC$ (очев.)

Тогда для ~~отрезка~~ звена AC это ~~вершины~~ ~~а~~ звенья A_1C_1 и B_1D_1 (их 2)

1000 2

Докажем связность:

Пронумеруем верш. от 1 до 1000

Тогда с 1ой верш. мы попадаем на 502ую верш. ($1 + 500 + 1$ по mod 1000 т.к. Верш. С для верш. А это сдвинутая на 1 противоположная.

⇓

~~1~~ Мы кажд. раз будем делать сдвиг на 501 по mod 1000. Тогда через 1000 ходов мы вернёмся в 1 т., пройдя все ост. номера, т.к. будем ходить 1 - 502, ~~2~~ - 503, ~~3~~ - 504 ... 3 - 504 5 - 506 7 - 508. ... ; 999 - 500 ; , 1 - 502, таким образом мы пройдём все чётные и нечётные номера => пройдём все.

⇓

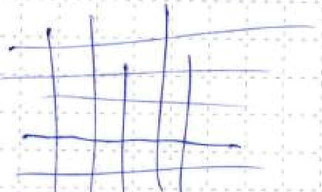
Пример доказан, т.к. все звенья 1ой длины, т.к. 1000-уг. при повороте не меняется

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 46

Оценка:

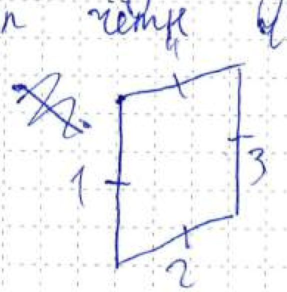
Посмотрим на какое-то звено, его пересек. $\geq k$ звеньев. Возьмём 1 из них и посм. на него. Его тоже пересек. $\geq k$ звеньев => среди такой картинки никакие 2 звена не соседн.



Тогда все звенья разб. на такие группы, в каждой группе $\geq 2k$ ребер и четное число концов. Из каждого конца исх. 2 звена и ломаная замкнутая.

Тогда у любых 2ух таких групп четн число общ. верш.

$m \vdots k$



Если 2 - тоже звено, тогда 4 тоже звено

$\Downarrow$

4 верш. совп.

$1000 = 8 \cdot 125$, но если $k \geq 3$, то кол-во концов в кажд группе - $4k$

~~Кол-во всех верш. $\vdots 4k$, тогда $k \leq 5$, но~~

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 46

7

Давайте заметим, что в каждом квадратике 2×2 стоит максимум 1 король, иначе 2 короля будут бить друг друга. Разобьём квадрат 30×30 на квадратики 2×2 $\frac{30\cdot30}{2\cdot2}=225$ => максимум 225 королей.

Тогда ~~максимум~~ в 5 (225-220) квадратиках нет королей. Посмотрим сколько квадратиков 2×2 в квадрате 9×9

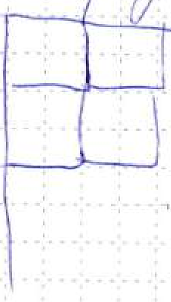
1	2	3	4	
5	6	7	8	
9	10	11	12	
13	14	15	16	

☆ Их 16. ~~Зна~~ Значит хотя бы в 16 − 5 есть короли 16 − 5 = 11

⇓

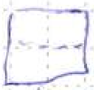
В любом квадрате 9×9 ≥ 11 королей

☆ Мы разб. квадрат 30×30 на кв. 2×2 так:



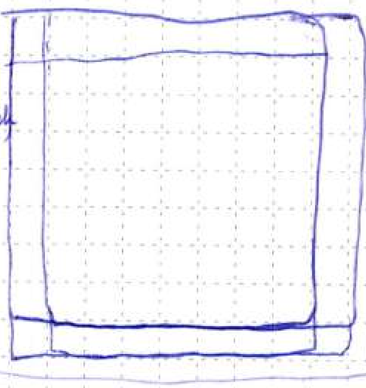
Тогда в любом кв 9×9 найдется 16 кв. из нашего разб., т.к. это квадрат 8×8, который мы можем поставить 4-мя сп. и 1 из них точно совп. с разб. кв-та 30×30: т.к. мы можем сдв. кв. 8·8 на 1 вниз, на 1 вправо, ~~зн~~ значит когда-то совп. с разб. кв-та 30×30 ~~т.к. квадратики 2×2~~

т.е. несовп. по горизонт. может быть тих на 1 кл., тогда сдвинем

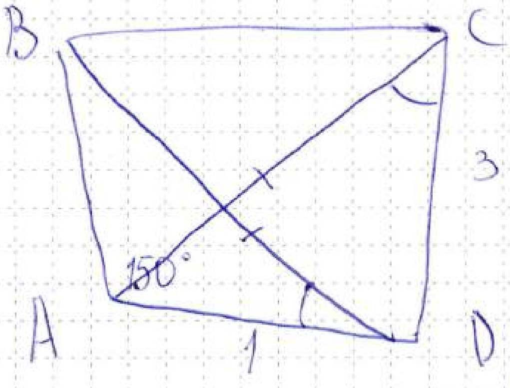


аналог. по верт.

(Т.е мы можем сдв. так, чтобы совп. с сеткой)

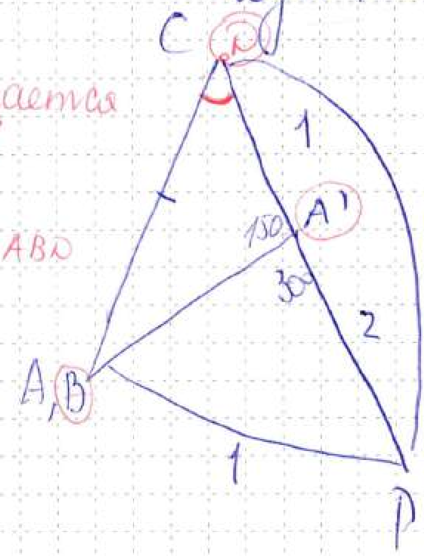


Задача № 6 Лист 1 из 2 Номер участника: 46 7 Еа



$AD = 1$ $CD = 3$

Наложим $\triangle BDA$ на $\triangle ACD$ так, чтобы ~~верш~~ B ~~совп~~ совп с A и D совп с C Так можно, ведь $AC = BD$



как получается точка A'?

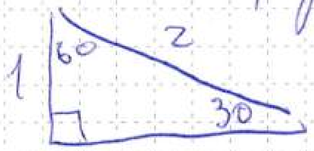
видимо $A'B'D'$ это образ $\triangle ABD$ после наложения

$\angle BA'D = 30°$?

$A'D = 2BD$

$\angle A'DB = 60°$

т.к. в треуг. $\triangle BA'D$ с ~~[illegible]~~

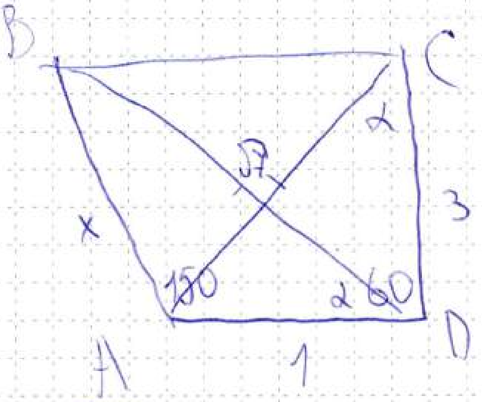


совп. две стороны и угол

раз треуг прямоуг. они равны

$\angle A'DB = 60°$

$\angle CDA = 60°$



+. кА

Тогда по теореме косинусов для $\triangle CDA$

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle CDA} = \sqrt{1 + 9 - 6 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

$AC = \sqrt{7} \Rightarrow BD = \sqrt{7}$

Тогда пусть $AB = x$, тогда по т. косинусов для $\triangle ABD$

$\sqrt{x^2 + 1 - 2x \cos 150} = \sqrt{7}$ $\quad \cos 150 = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 + 1 + \sqrt{3}x = 7$

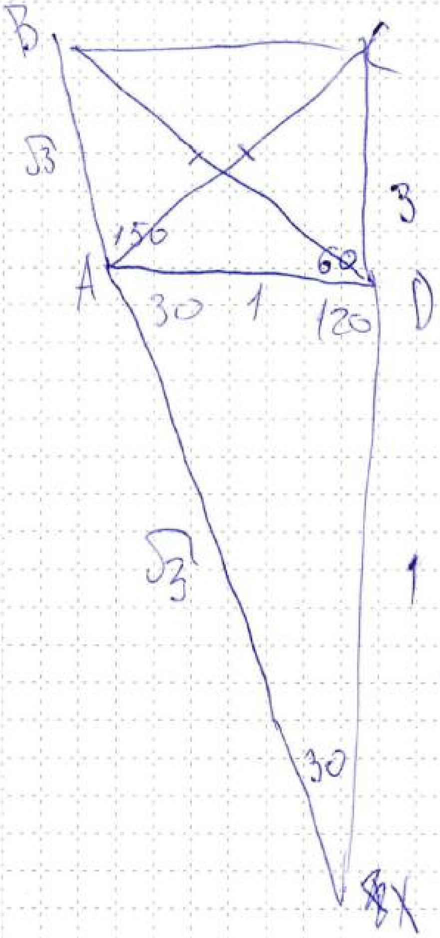
$x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$ (кв. уравнение)

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+24}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

$x > 0$ т.к. это длина

$$x = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



Продлим AB и CD до пересеч.

Они пересек. с этой ст. т.к. $150° + 60° > 180°$

Тогда $\angle ADX = 120°$, $\angle DAX = 30°$

$\angle AXD = 30° \Rightarrow AD = DX$

Тогда по теор. кос. для $\triangle ADX$

$$AX = \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$\cos 120 = -\frac{1}{2}$

$AX = \sqrt{3}$

Тогда по теореме кос. для $\triangle BCX$

$$BC = \sqrt{BX^2 + CX^2 - 2BX \cdot CX \cdot \cos 30}$$

$BX^2 = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (2 \cdot \sqrt{3})^2 = 12$ $\quad CX = 4$

$$BC = \sqrt{12 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{28 - 24} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: $BC = 2$

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 46

Допустим

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=(abc+1)p^2$

Тогда $abc+1 \vdots$ на 1 из 3ёх скобок, т.к. p^2 ~~~~ может покрыть max 2 скобки ~~тоесть~~ ~~на кажд~~ ~~для каждой скобки (НУО $ab+a+1$)~~ ~~либо $abc+1 \vdots ab+a+1$, либо $(abc+1$~~

Тоесть если

$(abc+1) \not\vdots\ ab+a+1 \qquad (abc+1)x \vdots ab+a+1$

$\not\vdots\ bc+b+1 \qquad (abc+1)y \vdots bc+b+1$

$\not\vdots\ ac+c+1 \qquad (abc+1)z \vdots ac+c+1$

То его нужно домножить на xyz, чтобы оно стало $\vdots$ на $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)$ $x,y,z>1$

Но $p^2 \neq xyz$ [?!]

$\Downarrow$

НУО $abc+1 \vdots ab+a+1$.

$(ab+a+1)c \vdots ab+a+1 \qquad abc+ac+c \vdots ab+a+1$.

$\Downarrow$

$ac+c-1 \vdots ab+a+1$.

$(ac+c-1)b \vdots ab+a+1$

$abc+bc-b \vdots ab+a+1$

$\Downarrow$

$bc-b-1 \vdots ab+a+1$

$\Downarrow$

$ab+a+1 \leq ac+c-1 < ac+c+1$

$ab+a+1 \leq bc-b-1 < bc+b+1$

$\Downarrow$

$ab+a+1$ – min из скобок.

Значит $abc+1 \not\vdots\ bc+b+1$

$abc+1 \not\vdots\ ac+c+1$ Иначе

+ мин

7 пп

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 46

$bc+b+1$ или $ac+c+1$ тоже наименьшие т.к. скобки симметричные

$abc+1 \not\vdots bc+b+1$
и
$abc+1 \not\vdots ac+c+1$

но $p^2(abc+1) \vdots bc+b+1$
и
$p^2(abc+1) \vdots ac+c+1$

$bc+b+1 \vdots p$

$ac+c+1 \vdots p$

$a(bc+b+1) \vdots p$

$b(ac+c+1) \vdots p$

$abc+ab+a \vdots p$

$abc+bc+b \vdots p$

$ab+a-bc-b \vdots p$

$ab+a+1-bc-b-1 \vdots p$

$bc+b+1 \vdots p$

$ab+a+1 \vdots p$

Значит каждая из скобок $\vdots p$

$abc+1 \vdots bc+b+1$ т.к

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = p^2(abc+1)$

$ab+a+1 \vdots p$

$ac+c+1 \vdots p$

$\frac{(ab+a+1)(ac+c+1)}{p^2}(bc+b+1) = abc+1$

$abc+1 \vdots bc+b+1 \Rightarrow bc+b+1$ - min из скобок, но $ab+a+1$ - min из скобок (?!) $\Rightarrow$ Ответ: не может

Если $abc+1 \vdots bc+b+1$,

то $abc+ab+a-abc-1 \vdots bc+b+1$

$ab+a-1 \vdots bc+b+1$

$abc+ac-c-abc-1 \vdots bc+b+1$

$bc+b+1 < ab+a+1$

и

$bc+b+1 < ac+c+1$

аналог. для $ac+c+1$.

Задача № 8 Лист 1 из 2 Номер участника: 46

$\overline{KA6}$ 0 АП

Давайте выберем 24 max по весу гири
Обозн. их за $M_1 \dots M_{24}$ $M_1 \geq M_2 \geq \dots \geq M_{24}$
Их сумма равна сумме нескольких других гирь (≥ 25)

1° 25 гирям
Их обозн. $X_1 \dots X_{25}$
И ост. гирю обозн. Y
~~Тогда из~~ $X_1 + \dots + X_{25} = S$
$M_1 + \dots + M_{24} = S$
Тогда из этих 25 мы можем 25 сп. выбрать 24 гири. Их суммы: $S-X_1, S-X_2 \dots S-X_{25}$
Тогда посмотрим на 1 из способов
$S-X_k$
Тогда посмотрим сумма каких гирь равна $S-X_k$
Если среди них ≤ 21 M_j, то (X) т.к.
$S-M_{k_1}-M_{k_2}-M_{k_3}+Y+X_k < S-X_k$
~~Если где~~
Среди них ≥ 22 M_j
1° 22 M_j
$S-M_{k_1}-M_{k_2}+X_k / Y_k < S-X_k$ (или)
$S-M_{k_1}-M_{k_2}+X_k+Y_k = S-X_k$
$M_{k_1}+M_{k_2} = 2X_k+Y_k$
2° 23 M_j
2.1° $S-M_{k_1}+X_k = S-X_k$
$M_{k_1} = 2X_k$. Тогда $M_1 + \dots + M_{24} > X_1 + \dots + X_{25}$ т.к.
$M_1 + \dots + M_{24} - M_{k_1} + X_k > X_1 + \dots + X_{25} - X_k$ $M_{k_1} = 2X_k$ (?!)

Задача № 8 Лист 2 из 2 Номер участника: 46

2.2°

$S - M_{k_1} + Y = S - X_k$

$M_{k_1} = X_k + Y$

Тогда $Y < X_k$, иначе сообр. 2.1°

Для каждых 24 из них мы находим

либо $M_{k_1} = X_k + Y$, либо $M_{k_1} + M_{k_2} = 2X_k + Y$

~~Если~~

Если $M_{k_1} = X_k + Y$, и $M_{k_1} + M_{k_2} = 2X_j + Y$ т.к.

тогда $M_{k_2} = 2X_j - X_k$. $\Rightarrow X_j > X_k$ т.к.

$M_{k_2} > X_k$

Давайте тогда сложим все получ. ра-ва

Если M_c не было ни в 1ом рав-ве заменим

его на X_1

$X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_{25}$

Тогда $25Y + M_{k_1} + \ldots + M_{k_{24}}$

Представлена идея взять 24 max и

далее доказано, что сущ. только 2сл. как такое

могло произойти