Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 1Б
аудитория – посадочное место

41306303
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ ЕМ	− ТК	+ МК	
7 АЮ	7 ПР	0 АУ	7 ВБ	21

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306303 — номер участника

лист 1 из 20

Задача 1.

Заметим, что $1<k<7$ всего 5 штук ($k \in \mathbb{N}$): 2, 3, 4, 5, 6

• Предположим, что Вася мог получить все 5 пятерок. Заметим тогда, что его число n_5 должно быть представимо в виде суммы двух, трёх, четырех, пяти, шести последовательных чисел (раз оно 2ух, 3ёх, 4ех, 5и, 6и — хорошее). Подробнее рассмотрим, что оно представимо в виде и двух и четырёх последовательных

см. продолжение

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 1 продолжение.

чисел. Пусть меньшие из этих чисел равны a и c. Тогда

$n_5 = a+(a+1) = b+(b+1)+(b+2)+(b+3)$

$2a+1 = 4b+6$

Заметим, что слева число $(2a+1)$ нечетное $(a\in\mathbb{N}, 2a \vdots 2, 1 \not\vdots 2)$, а справа $4b+6$ четное $(b\in\mathbb{N}, 4b \vdots 2, 6 \vdots 2)$.

Противоречие. Значит все пять пятерок он получить не мог.

- Тогда он получил <4 пятерок.

Предоставим пример,

см. продолжение

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306303 — номер участника

лист 3 из 20

Задача 1 продолжение

Как он мог получить 4 пятерки:

Пус: К примеру, он сказал $n_4 = 45$.

Тогда оно является 2-, 3-, 5-, 6- хорошим:

$45 = 22 + 23$

$45 = 14 + 15 + 16$

$45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$

$45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

• Тогда он получил в итоге ≤ 4 пят., а он смог получить 4. ответ: 4.

Ответ: 4 пятерки.

Задача 2.

• Введём следующие обозначения:

Учеников n.

Кружков c=7

Каждый ученик ходит в k кружков

• Рассмотрим следующий двудольный граф: вершины одной доли — ПАРЫ кружков, второй доли — ученики.

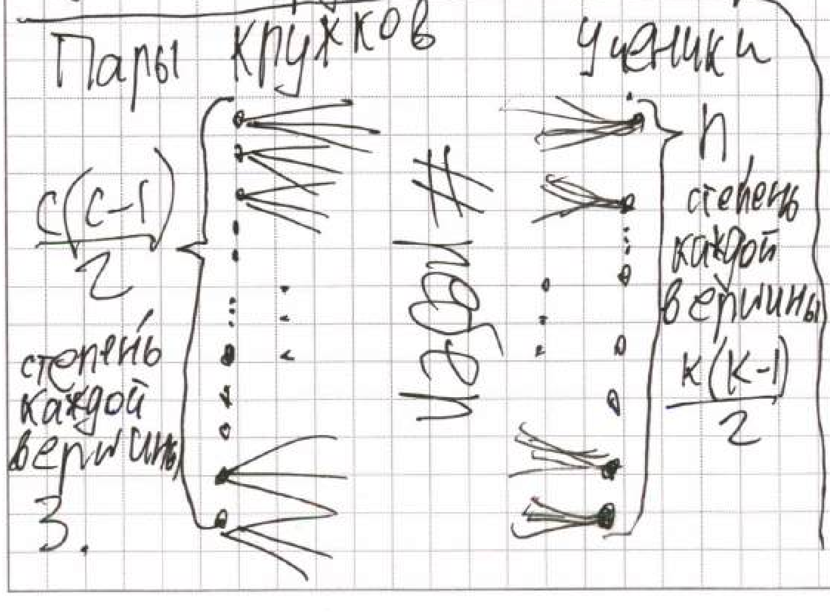
Будем соединять вершины из разных долей ребром, если ученик ходит в оба кружка из пары. Тогда, по условию,

см. продолжение

Продолжение задачи 2

Каждая ПАРА кружков соединена ровно с тремя учениками. (Ведь для любых двух кружков в оба из них ходят ровно три ученика). ~~Тогда~~ Также каждый ученик соединен с $\frac{k(k-1)}{2}$ парами кружков (количество способов выбрать два кружка из k)

Пары кружков $\frac{c(c-1)}{2}$ (количество способов выбрать два кружка из c)



см. продолжение.

Продолжение задачи 2

Подсчитаем количество ребер между долями двумя способами — через учеников и через пары кружков.

$$\#\text{ребер} = n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\#\text{ребер} = \frac{c(c-1)}{2} \cdot 3$$

Тогда

$$n \cdot \frac{k(k-1)}{2} = \frac{c(c-1)}{2} \cdot 3$$

$c = 7$

$$n = \frac{\frac{c(c-1)}{2} \cdot 3}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3}{k(k-1)} = \frac{126}{k(k-1)}$$

см. продолжение

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Первый день, заключительный этап

8 — класс
41306303 — номер участника
лист 7 из 20

Задача 2 продолжение

Заметим, что $k \geq 2$, т.к. иначе для любых двух кружков не нашлось бы ни одного человека, ходящего в оба.

$n = \frac{126}{k(k-1)}$; $n \in \mathbb{N}$, $n > 6$, $n < 60$

$k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ | Заметим, что для $k \geq 12$

$n \leq \frac{126}{11 \cdot 12} < 1$, тогда n не $\in \mathbb{N}$, что не так.

Тогда $2 \leq k \leq 11$, $k \in \mathbb{N}$

Переберем все варианты k, для каждого проверим n (должно быть $n \in \mathbb{N}$, $6 < n < 60$).

см. продолжение

Задача 2 продолжение

k	$n=\frac{126}{k(k-1)}$	$(n\in\mathbb{N}$ и $6<n<60)$?
2	63	X $(n\geq 60)$
3	21	V
4	$\frac{21}{2}$	X $(n\notin\mathbb{N})$
5	$\frac{63}{10}$	X $(n\notin\mathbb{N})$
6	$\frac{21}{5}$	X $(n\notin\mathbb{N})$
7	3	X $(n\leq 6)$
8	$\frac{9}{4}$	X $(n\leq 6)$
9	$\frac{7}{4}$	X $(n\leq 6)$
10	$\frac{7}{5}$	X $(n\leq 6)$
11	$\frac{63}{55}$	X $(n\leq 6)$

Тогда нам подходит только $k=3$; $n=21$.

Приведем пример, как такое могло быть.

см. продолжение

Задача 2 продолжение

~~Пронумеруем учеников №1, 2, 3 … 21.~~

~~Тогда пусть каждый ученик №i~~

~~ходит Пронумерует кружки №1, 2 … 7.~~

~~Тогда пусть в кружок №i ходят~~

~~ученики №3i−1, 3i, 3i+1~~

Разделим учеников на 7 групп — по три ученика в каждой

~~Пусть тогда~~ дети Пронумерует кружки: 0, 1, 2, 3, … 6

Пронумерует группы: 0, 1, 2, 3, … 6

Пусть тогда ученики i-той группы ходят в $i, i+1, i+5 \pmod 7$ кружки

см. продолжение

Задача 2 продолжение

Тогда ~~и~~ для кружка j он пересекается с кружками с каждым в одной группе:
с $j+1 \pmod 7$ в j-ой группе,
с $j+2 \pmod 7$ в $(j+2) \pmod 7$,
с $j+3 \pmod 7$ в $(j+2) \pmod 7$,
с $j+4 \pmod 7$ в $(j-1) \pmod 7$
с $j+5 \pmod 7$ в j-ой группе,
с $j+6 \pmod 7$ в $(j-1)$ группе.

То есть с каждым ровно в одной группе (три ученика) тогда, т.к. все симметрично для учеников, они учавствуют в одинаковом количестве кружков. Для удобства можно ~~просто~~ изобразить что ученики

см. продолжение

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

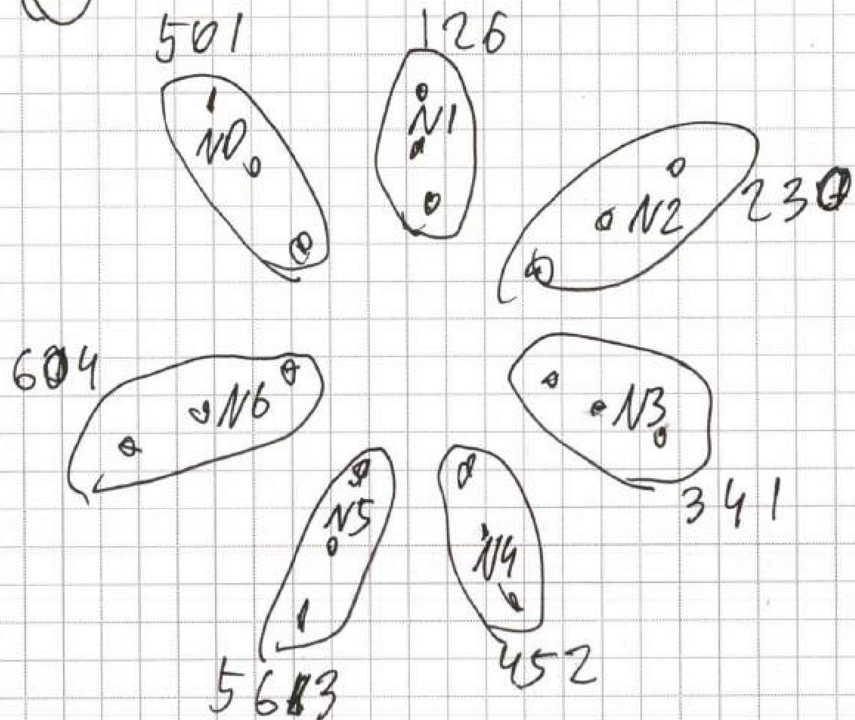
41306303 — номер участника

лист 11 из 20

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 2 продолжение

На схеме: • — ученики, (⋮) — группы; Nx — номер группы; i — кружки (напр (⋮)[5] означает что вся группа ходит в 5)



Итог:

Тогда не 21 быть не может, а 21 может.

Ответ: 21

Задача 4. Пример верный

• Приведём пример, в котором каждое звено пересекает перпендикулярно 250 звеньев: (k = 250)

1. Построим квадрат ABCD со стороной a (не из звеньев ломанной, а просто для удобства).

2. Разделим каждую сторону квадрата на 125 равных частей. На каждой из этих частей построим внутрь квадрата равнобокий равнобедренный треугольник (его равные стороны это звенья ломаной). Длина звеньев пусть будет достаточно

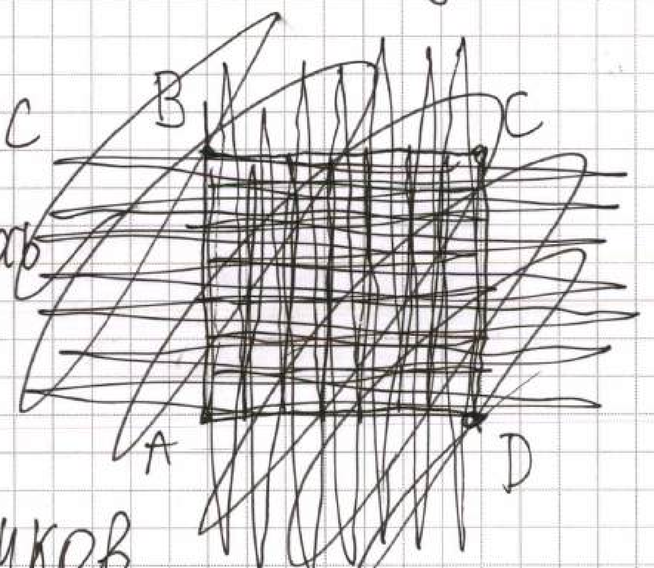
см. продолжение

Задача 4 Продолжение

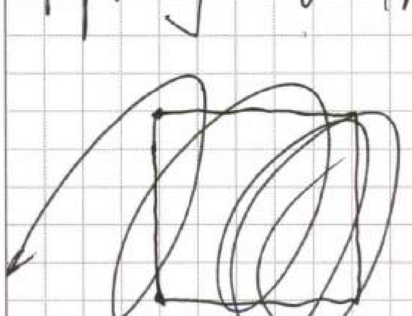
большая, чтобы звенья ломаной пересекли сторону квадрата противоположную той, на которой мы их построили. (Например, длина звеньев 2a)

См. рисунок на след. странице. (рис. 1)

Тогда у нас ~~обр~~ образовалось много ~~по~~равных треугольников

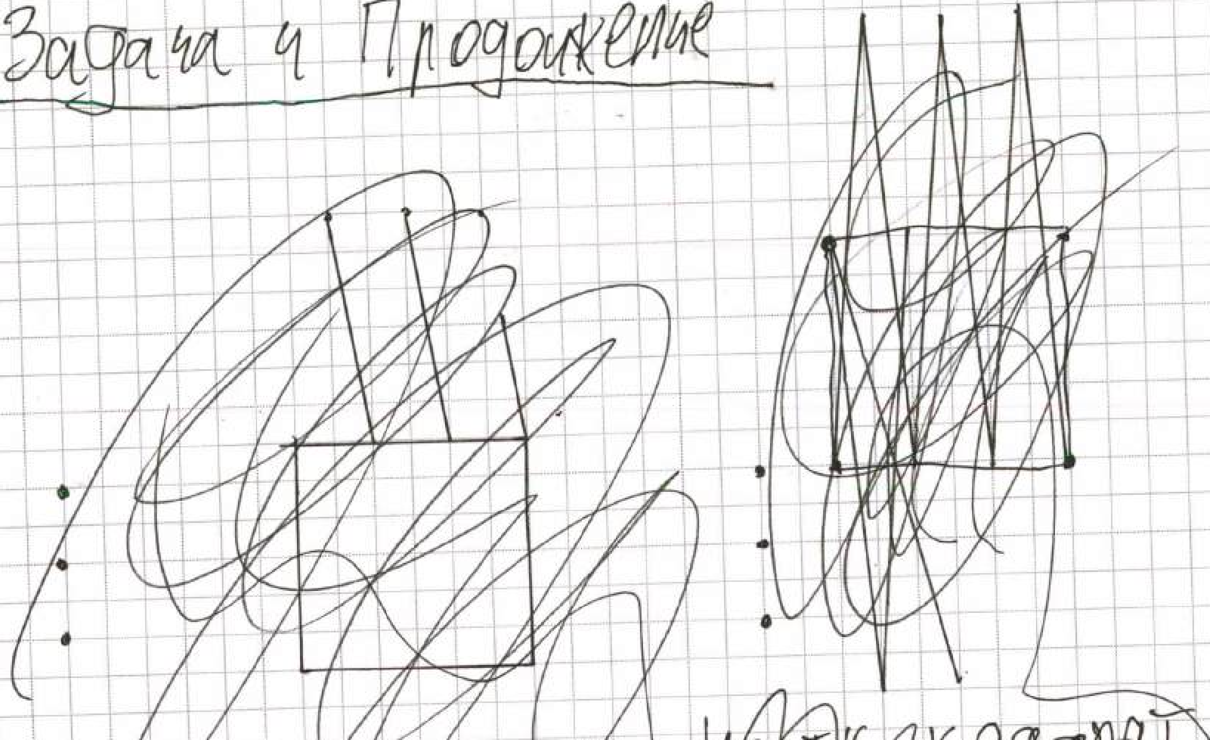


вида ~~...~~ звено — отрезочек $\frac{a}{125}$ — звено. Т.к. ~~он~~ они стоят отрезочками на одной стороне, их стороны образуют по два семейства парал. прямых для каждой стороны квадрата.



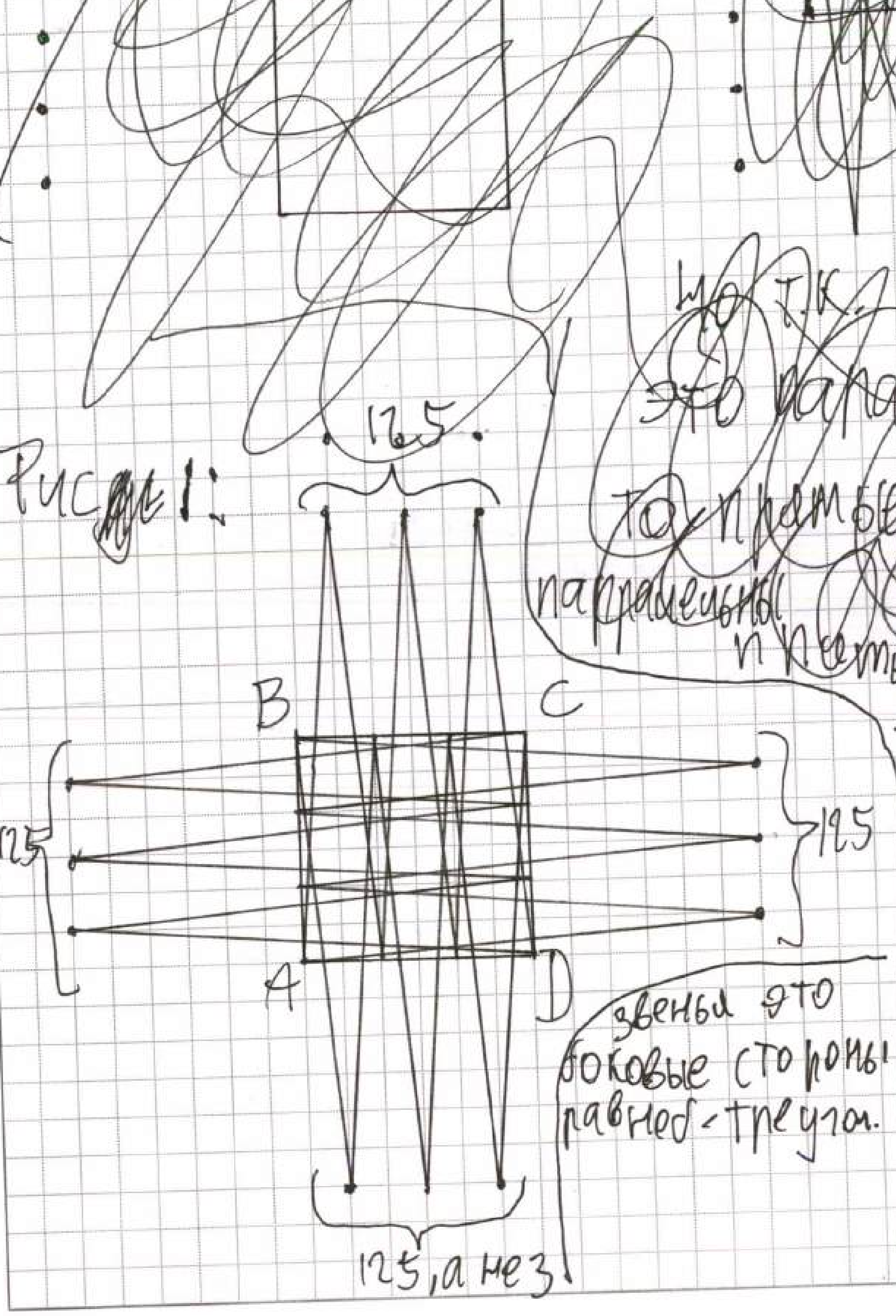
см. продолж.

Задача 4 Продолжение



~~но т.к. квадрат это параллелограмм, то прямые Am параллельны и т.к.~~

Рис. 1:



звенья это боковые стороны равнобед.-треугол.

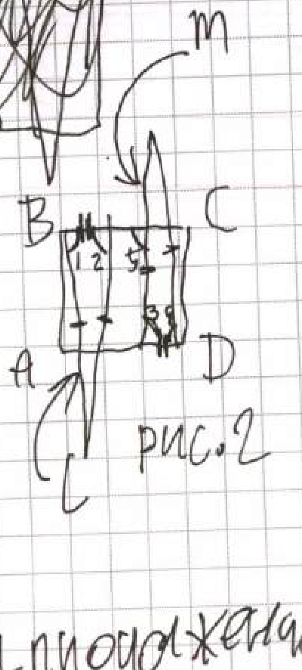


рис. 2

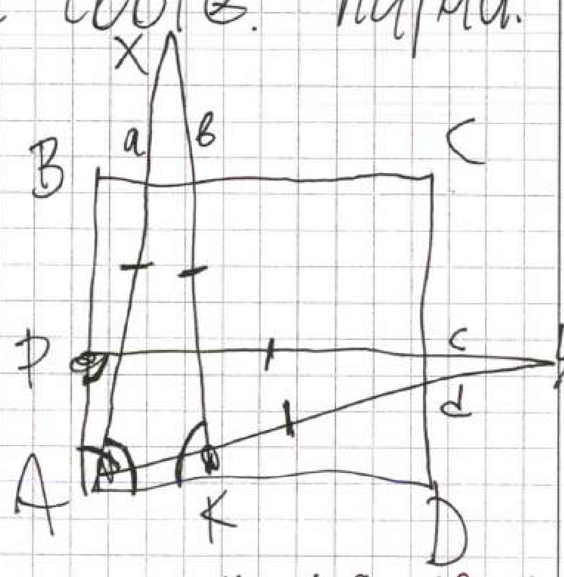
см-продолжение

Задача 4 продолжение

Т.к. ABCD – квадрат, то его стороны (против) параллельны.
Но тогда прямые вида l и m парал., т.к. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (равнод
$\angle 5 = \angle 3$ (парал
$\angle 5 = \angle 2$

Δ равны

Тогда у нас 4 семейства парал. прямых, по 250 прямых каждое, они соотв. парал. прямым a, b, c, d.
Но т.к. Δ AXK = Δ AYP, и $\angle A = 90°$, (углы см. рис. равны), то $b \perp d$, $a \perp c$.



см. продолжение

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

8 класс | 41306303 номер участника | лист 16 из 20

и продолжения

То есть 250 прямых || в перпендикулярны 250 прям. || d, (аналогично ||a ⊥ ||c),

т.к. очевидно, что ~~прямые ||в~~ ~~пар~~ звенья ||в пересек. с ||d (аналогично ||a и ||c), то каждое ~~прям~~-звено перпендикулярно и пересекает 250 звеньев (см. ~~рис~~ рис.1). То есть k может быть 250

- Теперь докажем, что не может быть так, что каждое ~~прямая~~ звено перпендикулярно и пересекает > 250 ~~пр~~ звеньев.

см. продолжение

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 4 продолжение.

Рассмотрим все семейства параллельных прямых. Тогда для каждого семейства есть "парное" ему, которое ему перпендикулярно параллельно. Пусть семейств n. Тогда найдется по Пр. Дирихле семейство из $\left\lfloor \frac{1000}{n} \right\rfloor$ звеньев. Тогда парное ему пересекает $\le \left\lfloor \frac{1000}{n} \right\rfloor$*. Пусть ~~на от~~ можно $k \ge 251$. Тогда $k \le \left\lfloor \frac{1000}{n} \right\rfloor$, $251 \le \left\lfloor \frac{1000}{n} \right\rfloor$. Тогда $n \ge 4$ т.к. и четное (иначе есть семейство без пары которое не пересекает перпендикулярно никого. То

см. продолжение

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Заключительный этап

8 класс 41306303 номер участника лист 18 из 20

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 4 продолжение.

есть для него $k=0$.)

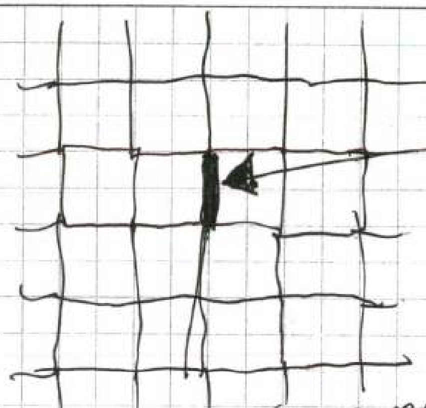
Тогда, если $n \geq 4$, $n \in N$, $n \vdots 2$, то $n=2$.

Тогда она в паре.

То есть у нас есть только два семейства параллельных звеньев. Эти два семейства перпендикулярны. Тогда пусть еще раз это возможно. Выберем одно звено из этого "примера". Построим ~~сет~~ квадратную сетку вокруг так, чтобы это ребро было стороной одной клетки.

см. продолжение

Задача 4 Продолжение



звено.

(так построим).

Заметим, что все остальные звенья тогда тоже являются сторонами клеток этой решётки, тогда они вообще не могут пересечь друг друга.

• Значит $k>250$ не возможно.

А $k=250$ возможно.

Ответ: $k=250$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Заключительный этап

8 — класс

41306303 — номер участника

лист 20 из 20

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 3

Сделаем замену: $x=a-1$

$y=b-1$

$z=c-1$.

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)=0$

$x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)=0$

$x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

Доказать

$$\frac{x^2}{y+z+3}+\frac{y^2}{x+z+3}+\frac{z^2}{x+y+3}\overset{?}{\leq}\frac{3}{x+y+z+4}$$

Нет продвижений

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [v] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [v] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [v] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

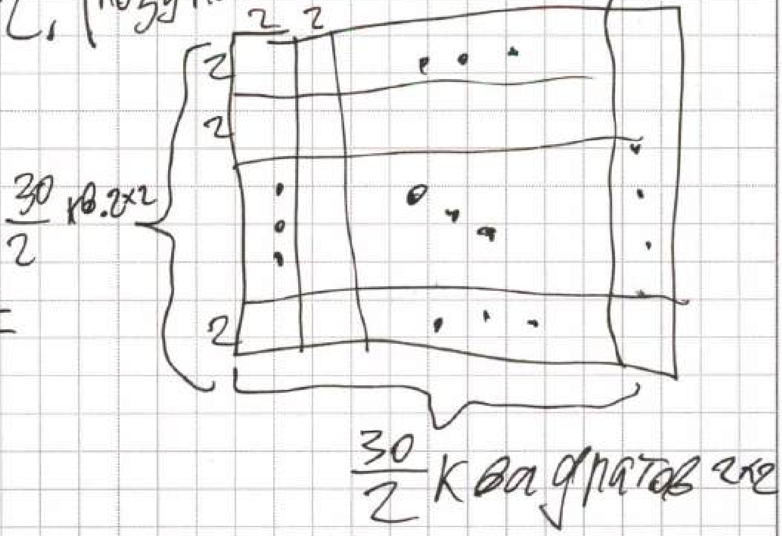
5-4 - 45
аудитория – посадочное место

41306303
номер участника

5	6	7	8	Σ
v + АД	+ КН	− А.П.	− КА	
7 ПР	7 АЮ	1 МС	0 МК	15

Задача 5

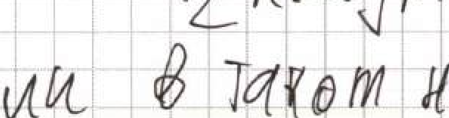
Разобьём доску 30×30 на квадраты 2×2. (позднее "наши квадраты")



Тогда их

$\left(\frac{30}{2}\right) \times \left(\frac{30}{2}\right) = 15 \times 15 = 225$

Заметим, что если в таком нашем квадрате стоит хотя-бы один король, то он бьёт все клетки этого квадрата:



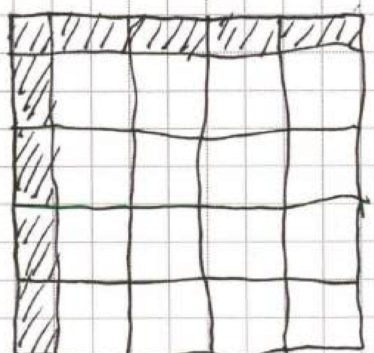
Тогда второго короля стоять в этом квадрате уже не может. То есть в каждом нашем квадрате 2×2 стоит либо 1, либо 0 королей.

см. продолжение

Продолжение задача 5.

Из-за этого, т.к. наших квадратов 2×2 225, а королей 220, ровно в 225−220 = 5 квадратах нет королей и в 220 есть 1.

Рассмотрим ~~наш~~ каждый квадрат 9×9. Т.к. 9 $\not\vdots$ 2, ~~он~~ мы разбили его на наши квадраты следующим образом с точностью до поворота:



В заштрихованных областях $n \geq 0$ королей. Но еще 16 ~~квадрато~~ наших квадратов 2×2 дошли центы. Т.к. 0 королей в ≤5 из них, то

см. продолжение

Продолжение задачи 5

по 1 королю в $k \geq 16-5=11$ из них.
Тогда всего королей в квадрате

$n=h+k \geq 0+11=11$
$(h \geq 0,\ k \geq 11)$

То есть в каждом квадрате 9×9
$n \geq 11$ королей.

Ответ: см. выше 9.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306303 — номер участника

лист 4 из 12

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 6

Отметим F на CD такую, что $CF=1$, а $FD=2$ $\left(CF+FD=CD\overset{\text{по усл.}}{=}3\right)$. Проведем BF и FA.

По усл.: $\angle ADB=\angle ACD\overset{\text{пусть}}{=}\alpha$

$AD=1$

$\angle BAD=150^\circ$, $AC=BD$

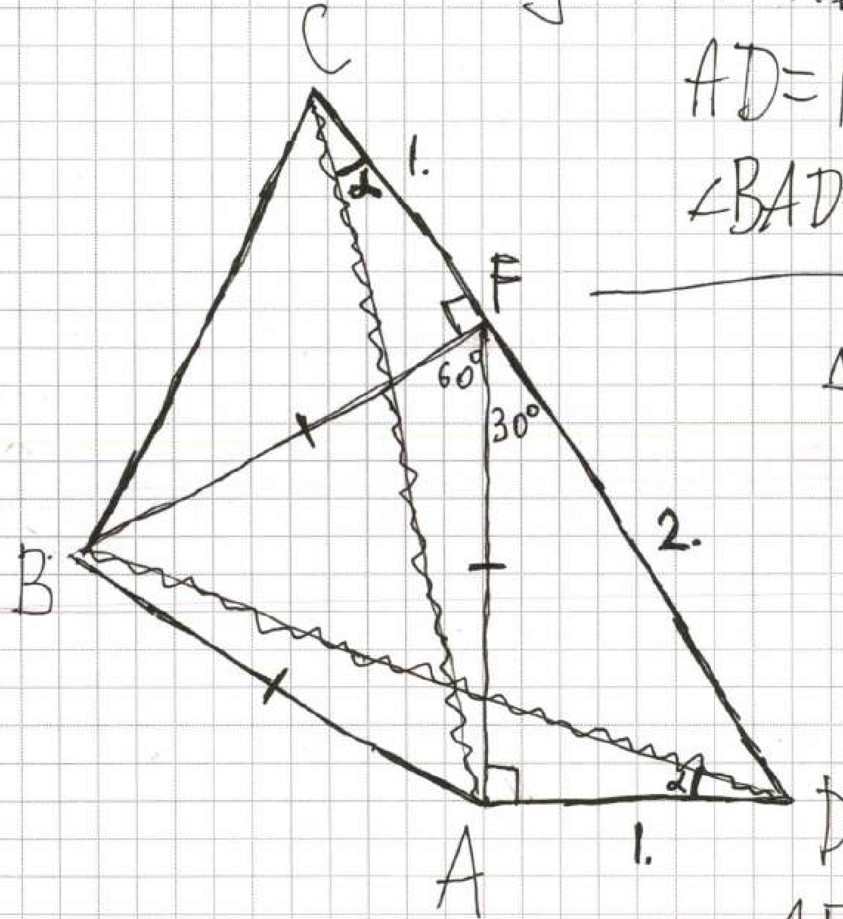


рис.1.

$\triangle ADB=\triangle FCA$

$(AD=FC=1,\ \angle ADB=\angle FCA=\alpha,\ DB=CA)$

$\Downarrow$

$AB=FA$,

$\angle CFA=\angle DAB=150^\circ$

$\angle AFD=180^\circ-\angle CFA=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

см. продолжение

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

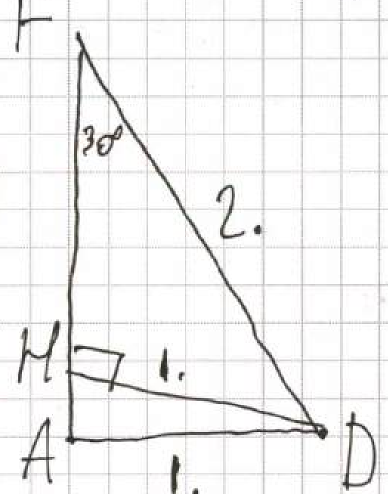
8 — класс

41306303 — номер участника

лист 5 из 13

Продолжение задача 6

Рассмотрим подробнее Δ ~~...~~ AFD.



Опустим на AF высоту DH.

(Неважно куда она упадёт)

Тогда в ΔFHD $\angle F=30°$; $\angle H=90°$.

Тогда $HD=\frac{FD}{2}=\frac{2}{2}=1$.

т.к. перпендикуляр DH — кратчайшее и единственное расстояние от т. D до AF, то т.к. AD тоже равно 1., т. A и H совпадают (из точки на прямую можно провести только один перпендикуляр.)

Тогда $\angle FAD=90°$

см. продолжение.

Продолжение задачи 6

Вернемся к рис. 1.

$\angle BAF = \angle BAD - \angle FAD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$.

Тогда в $\triangle BAF$ $BA = AF$ и $\angle BAF = 60^\circ$.

Тогда она равносторонний.

$BF = FA = BA$; $\angle BFA = \angle FBA = \angle BAF = 60^\circ$

Тогда $\angle CFB = 180^\circ - \angle BFA - \angle AFD =$

$= 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

Следовательно $\triangle BFC = \triangle FAD$

($BF = FA$; $\angle CFB = \angle FAD = 90^\circ$; $FC = AD = 1$.)

~~Тогда~~ Тогда $CB = DF = 2$.

$BC = 2$.

Ответ: 2

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306303 — номер участника

лист 7 из 13

Задача 8

Рассмотрим 24 самые тяжелые гири. Заметим, что их нельзя уравновесить ≤24 другими гирями, ведь это будет легче (все гири разные). Тогда их следует уравновесить ≥25 гирями. Но всего их осталось 50−24=26.
То есть их уравновесят либо 25, либо 26 гирь

$\boxed{\text{Задача 7}}$ Пусть может.
частное пусть d. $d=p^2$

$$d=\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1}=\frac{(ab+a+1)}{x}\cdot\frac{(bc+b+1)}{y}\cdot\frac{(ca+c+1)}{z}$$

где $x,y,z\in\mathbb{N}$, сомножители множители тоже $\in\mathbb{N}$

и $xyz=abc+1$.

(Потому-что делится.)

Заметим, что одно из $\frac{ab+a+1}{x}$, $\frac{bc+b+1}{y}$, $\frac{ca+c+1}{z}$

$=1$, иначе $d\neq p^2$, а равно произведению

трех $\neq 1$ чисел. б.о.о. $\frac{ab+a+1}{x}=1$??

Тогда $x=ab+a+1$. Т.к. $xyz=abc+1$, то $abc+1\vdots x$

То есть $abc+1\vdots ab+a+1$ ✓

ст. продолж.

Продолжение задачи 7

Также заметим, что тогда

$$\underbrace{(bc+b+1)}_{y} \cdot \underbrace{(ca+c+1)}_{z} = p^2$$

Есть варианты:

	y	z
№1	p^2	1
№2	p	p
№3.	1	p^2

Заметим, что во вар. 1.

$$abc+1 = (a^2b+a+1)\,y\,(ca+c+1)$$

$$abc+1 = \underbrace{y}_{\geq 1}(\underbrace{a^2bc+abc+ab+a^2c+ac+a\cancel{+}ca+c+1}_{> abc+1})$$

против.

аналогично №3.

ст. продолж.

Продолжение задачи 7

Тогда $\frac{(bc+b+1)}{y}=p$

и $\frac{(ca+c+1)}{z}=p$

(ещё $xyz=abc+1$
$yz=abc+1$

$\frac{(bc+b+1)(ca+c+1)}{yz}=p^2$

$\frac{abc^2+bc^2+bc+abc+bc+b+ca+c+1}{abc+1}=p^2$

$\frac{ac(abc+1)+(abc+1)+bc^2+2bc+b+ac}{abc+1}=p^2$

см. продолж.

Продолжение задачи 7

$$c+1+\frac{bc^2+2bc+b+ac}{abc+1}=p^2$$

$$c+1+\frac{b(c+1)^2+ac}{abc+1}=p^2$$

$$\frac{(c+1)(b(c+1)+abc+1)+ac}{abc+1}=p^2 \quad (1)$$

Вернемся к $abc+1 \vdots ab+a+1$

$$\underset{\vdots a}{abc}+1=\underset{\vdots a}{kab}+\underset{\vdots a}{ka}+k \quad (k\in N)$$

$$\Downarrow$$

$$k-1 \vdots a$$

$$\frac{abc+1}{ab+a+1}=k;\ \frac{ab+a+1}{x}=\ \Rightarrow k=yz$$

$xyz=abc+1$ $\quad$ $yz-1 \vdots a$

см. продолж.

Продолжение задачи 7.

Вернемся к (1.)

$$(c+1)((bc+b+abc+1))+ac=p^2abc+p^2$$

$$bc^2+bc+abc^2+c+bc+b+abc+1+ac=p^2abc+p^2$$

$\vdots c \quad \vdots c \quad \vdots c \quad \vdots c \quad \vdots c \quad \vdots c \quad \vdots c \quad \vdots c$

$$\Downarrow$$

$$b+1-p^2 \vdots c$$

$$b+1 \underset{c}{\equiv} p^2$$

$$b \underset{c}{\equiv} p^2-1$$

$$b \underset{c}{\equiv} (p-1)(p+1)$$

ч?

Номер участника 41306303

Класс 8

ФИО участника Мазный Иван Никитич

Задача № 7

Вопрос

Что такое частное трёх чисел?
(В задаче частное ~~а~~ a, b, c)

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ

Речь идёт про частное чисел

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$

и

$abc+1$

Задача №

Вопрос

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ