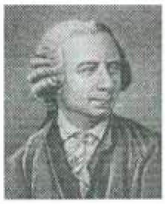


8

Технический лист
День 1

# Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Гжель - ..........
аудитория – посадочное место

41306307
номер участника

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| + АУ | + ЕМ. | ± МС | — МК | |
| 7 ЕЗ | 7 ПР | 6 И.Б. | 0 ЗБ | 20 |
| | | | | |

Задача № 1

Пусть если число k-хорошее, то оно равно $a_{k-1}\cdot k+\frac{k(k-1)}{2}$ (т.е. оно равно $a_{k-1}+(a_{k-1}+1)+\ldots(a_{k-1}+k-1)$).
Тогда, рассмотрим чему должно равняться, если оно k-хорошее, и $2<k<7$:

| k | n |
|---|---|
| 2 | $2a_1+1$ |
| 3 | $3a_2+3$ |
| 4 | $4a_3+6$ |
| 5 | $5a_4+10$ |
| 6 | $6a_5+15$. |

Заметим, что ~~если~~ n не может быть 2-хорошим и 6-хорошим, если оно 4-хорошее (отл. по четности), а значит Вася получит максимум 4 пятерки из 5. Получить он может, если назовёт число $n=45$, ~~ведь~~ тогда:

$n=22+23$; $n=14+15+16$; $n=7+8+9+10+11$; $n=5+6+7+8+9+10$.

Ответ: 4 пятерки

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306307 — номер участника

лист 2 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача № 2

Пусть учеников $a$ и каждый из них посещает $x$ ($x>1$ иначе нет 3-х посещающих один) кружков. Тогда, пусть каждый ученик съест конфету за всевозможные пары кружков, в которые он ходит (т.е. он съест $\frac{x(x-1)}{2}$ конфет). Всего конфет будет съедено $\frac{a\cdot x\cdot(x-1)}{2}$. С другой стороны в каждую пару кружков одновременно ходят 3 ученика, а значит от них (этой пары) будет съедено 3 конфеты, а значит всего конфет было съедено $3\cdot\frac{7\cdot6}{2}=63$. Имеем:

$$\frac{a\cdot x\cdot(x-1)}{2}=63 \Leftrightarrow ax(x-1)=126\ (=2\cdot3\cdot3\cdot7)$$

Рассмотрим всевозможные значения $x$, учитывая то, что $126 \vdots x$ и $126 \vdots x-1$, чтобы найти всевозможные значения $a$ (если $a$ будет $>6$ и $<60$, то столько учеников может быть):

$x=1$; $x-1=0$ (!)

$x=2$; $x-1=1$: $a=63>60$ (!)

$x=3$; $x-1=2$: $a=21$

$x=6$; $x-1=5$.

$x=7$; $x-1=6$: $a=3<6$ (!)

Далее по мере возрастания $x$ $a$ будет только уменьшаться и точно нам не подойдет. Значит, в классе могли быть 21 человек, и каждый посещал 3 кружка. (~~например, 1-ый мог посещать 1-ый, 2-ой и 3-ий, 2-ой - 3-ий; 3-ий и 4-ой.., 7-ой - 7-ой, 1-ый и 2-ой, 2-ой 1-ый; 4-ый и 3-ий, 3-ий - 2-ой; 5-ый и 1-ый.~~) Это возможно, так как это ед. подходящий вариант.

Ответ: 21

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача №3 (4.1)

Не умаляя общности, пусть $a \le b \le c$.
Тогда, если $c = 0$, то $a = b = c = 0$, а ~~значит~~
тогда $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \le \frac{3}{1}$ условие выполняется
Иначе, если $c < 1$, $a^2 \le a$; $b^2 \le b$, $c^2 < c \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \neq a+b+c$.
Значит, $c \ge 1$.
Огрубим выражение:
$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c} \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \frac{(a-1)^2}{a+b+1} + \frac{(b-1)^2}{a+b+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-a-b-c}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c} \Leftrightarrow \cancel{3}+2a+2b+2c-a^2-b^2-c^2-\cancel{2ab}-\cancel{2bc}-\cancel{2ac}$$
$\le 3a+3b+3 \Leftrightarrow 3c-2ac-2bc \le a+b+2ab \Leftrightarrow c(1-a-b) \le$

неравносильный переход

$\le \frac{a+b}{2}+ab$. Если $1 \le a+b$, то это верно, а значит задача решена. Иначе, $c \ge 1 \ge a+b$.
Теперь вернемся к изн. неравенству и обозначим
$x = 1-a$; $y = 1-b$; $z = c-1$ (тогда $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $z \ge 0$)
Отсюда $a+b+c+x+y-z = 3$. Также, ~~$x^2+y^2+z^2=$~~
~~$=3+a^2+b^2+c^2-2a-2b+2c \Rightarrow x^2+y^2+z^2=3$~~
$a^2+b^2+c^2 = x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+3 = z-x-y+3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = x+y-z$.
Также заметим, что если $c \ge 2$, то $c^2 \ge 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow c^2 - c \ge 2$, но $a+b-a^2-b^2 \le 2$, значит $a^2+b^2+c^2 \neq a+b+c$

$c^2-c$

Задача №3 (ч. 2)

Значит, $z \le 1$.

Заметим, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{b+a+1} \overset{?}{=}$

$= \frac{x^2}{a+b+c+x}+\frac{y^2}{a+b+c+y}+\frac{z^2}{a+b+c+z}$ и $\frac{3}{a+b+c+1} =$ $3=a+b+c+x^2+y^2+z^2$ (верно, но не доказано)

$= \frac{a+b+c+x^2+y^2+z^2}{a+b+c+1} = \frac{a+x^2}{a+b+c+1}+\frac{b+y^2}{a+b+c+1}+\frac{c+z^2}{a+b+c+1} =$

$= \frac{x(x-1)+1}{a+b+c+1}+\frac{y(y-1)+1}{a+b+c+1}+\frac{z(z+1)+1}{a+b+c+1}$

Почленно сравним эти выражения.

$\frac{x^2}{a+b+c+x} \le \frac{x(x-1)+1}{a+b+c+1}$ (т.к. $\frac{x(x-1)+1}{a+b+c+1} = \frac{x^2+(1-x)}{a+b+c+x+(1-x)}$ и $a=1-x\ge 0$ $x^2 \le a+b+c$)

$\frac{y^2}{a+b+c+y} \le \frac{y(y-1)+1}{a+b+c+1}$ (аналогично)

$\frac{z^2}{a+b+c+z} \le \frac{z(z+1)+1}{a+b+c+1}$ (т.к. $\frac{z(z+1)+1}{a+b+c+1} \ge \frac{z^2+(1+z)}{a+b+c+z+(1-z)} \ge \frac{z^2+(1-z)}{a+b+c+z+1-z}$, дальше аналогично).

Значит, вторая часть $\ge$ первой, ЧТД.

Задача №4

Ответ: $k = 250$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 2

## Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

.......... - ..........

аудитория – посадочное место

41306307

номер участника

| 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| + АД | + КН | −. РХ | Ø АА | |
| 7 МГ | 7 АЮ | 1 МС | Ø АЮ | 15 |
| | | | | |

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306307 — номер участника

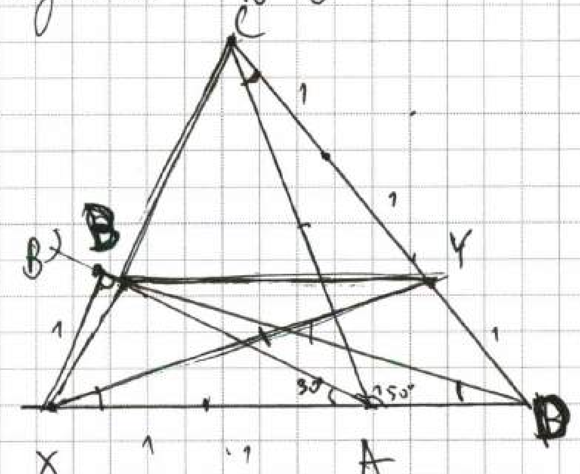
лист 1 из 3

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача № 5

Разобьем доску на 15x15 непересек. квадратиков 2x2. В каждом таком стоит не более одного короля, а значит в целом королей не более 15·15=225, а значит не более 5 квадратов 2x2 пустует. Каждый квадрат 9x9 занимает собой 4x4=16 квадратов 2x2, а значит из этих квадратов занято хотя бы 16-5=11, а значит королей внутри каждого квадрата 9x9 хотя бы 11 штук, ЧТД.

Задача № 6



Отметим на прод. $AD$ за $A$ т. $X$ такую, что $AX = 2$ (а на $CD$ т. $Y$ такую, что $DY = 1$). Тогда заметим, что $CD = XD = 3$, $XA = CY = 2$ а значит, исходя из симметрии ($\triangle CDY$ – $\triangle$), $XY = CA = BD$, $\angle YXD = \angle ACD = \angle BDX$. Отсюда, тоже исходя из симметрии отн. серпер-а к $XD$ $XBYD$ – равнобок. трапеция и $BX = YD = 1$.
Теперь, отмет. т. $B'$ так, что $\angle B'XA = 60°$ и $B'X = 1$. Тогда, в $\triangle B'XA$ ~~катет $B'X$~~ $\triangle$ треуг. 30/60/90 (т.к. один из углов $60°$ $\Rightarrow$ $B'XM$ – равностор. (где $M$ – сер. $XA$) Ну тогда, $\angle B'AX = 30°$, а значит также $\triangle B'BX$ – равнобедр. с углом в $90°$, что невозможно, если т. $B'$ не совпала с $B$. Выходит, $\angle BXD = 60° = \angle YDX$. Получается, $\triangle CDX$ – $\triangle$ с $\angle CDX = 60° \Rightarrow$ он равносторонний и $X$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Тогда $BC = XC - XB = CD - YD = 3 - 1 = 2$.
Ответ: $BC = 2$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс; 41306307 — номер участника; лист 3 из 3

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача №7

Предположим, что это возможно. Тогда обозначим это простое как $p$.

Заметим, что тогда на ~~более~~ $abc+1$ должно делиться хотя бы на одну из этих скобок, иначе в частном от деления получится произведение хотя бы 3-х простых.

Не умоляя общности, пусть $abc+1 \vdots (ab+a+1) \Rightarrow$ ~~Из этого следует, что~~ $\Rightarrow abc+1 = (a(b+1)+1)\cdot k \Rightarrow$

$\Rightarrow (bc+b+1)(ac+c+1) = p^2 \cdot k \Rightarrow (bc+b+1)(ac+c+1)$ делятся на квадрат этого простого.

Также заметим что т.к. $abc+1$ ~~[illegible]~~ $\underset{a}{\equiv} 1$ $\underset{b}{\equiv} 1$ и $\underset{c}{\equiv} 1$, $(a(b+1)+1)(b(c+1)+1)(c(a+1)+1) \underset{a}{\equiv} p^2$, $\underset{b}{\equiv} p^2$ и $\underset{c}{\equiv} p^2 \Rightarrow (c+1)(bc+b+1) \underset{a}{\equiv} p^2$, $(a+1)(ca+c+1) \underset{b}{\equiv} p^2$, $(b+1)(ab+a+1) \underset{c}{\equiv} p^2 \Rightarrow$ каждое из этих выражений $\geq p^2 \Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1)(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) \geq p^6$ (1)

Также заметим что исходя из $(abc+1)\cdot p^2 = (ab+a+1)\cdot(bc+b+1)(ac+c+1)$, $p^2 \geq (a+1)(b+1)(c+1)$.

Теперь, из (1):

$p^2 \cdot p^2 \cdot (abc+1) \geq p^6 \Rightarrow abc+1 \geq p^2 \Rightarrow abc+1 \geq (a+1)(b+1)(c+1)$

$\Rightarrow$ противореч.

Ответ: нет, не может.