Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-4 - 1А
аудитория – посадочное место

41306297
номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;

☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;

☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ ОЛ	+ КА	Ø МК	
7 ЕЗ	7 ПР	7 МС	Ø АБ	21

№1.

Оценка:

Лемма №1: У одного числа, k не может быть равно и 2 и 4 одновременно.

Допустим x можно представить и двумя и 4-мя последовательными числами. Тогда:

$$x = a + \underbrace{(a+1)}_{\text{для } k=2} = b + (b+1) + (b+2) + \underbrace{(b+3)}_{\text{для } k=4}$$

$$x = \underbrace{2a+1}_{\not\vdots 2} = \underbrace{4b+6}_{\vdots 2}$$, тогда x одновременно четный и нечетный, а такого быть не может.

Максимальное количество 5 которые мог получить Вася это 5 т.к. $1 < k < 7 \Rightarrow k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, но т.к. из Леммы №1 следует, что 2 и 4 одновременно не могут быть $k \Rightarrow$ ~~max~~ максимум 4 пятерки.

Берем только натуральные т.к. сумма натуральных чисел натуральное число

Пример:

Число 45

$k=2$; $45 = 22+23$

$k=3$; $45 = 14+15+16$

$k=5$; $45 = 7+8+9+10+11$

$k=6$; $45 = 5+6+7+8+9+10$

Ответ: максимум Вася мог получить 4 пятёрки

№2 (начало)

Галочка - любые 2 ребра выходящих от одного ученика к разным кружкам образуют галочку — ученик < кружок I, кружок II; основание, концы

Лемма №1: всего галочек в двудольном графе ученики-кружки 63.

У любых двух кружков ровно 3 общих ученика $\Rightarrow$ у любых двух кружков ровно 3 галочки с разными ~~вершинами~~ основаниями и одинаковыми концами

$\Rightarrow$ Т.к. всего пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$, и никакую галочку мы не считали дважды т.к. каждая галочка относиться только к одной паре кружков, т.к. у нее 2 конца $\Rightarrow$ всего галочек $21\cdot 3 = 63$.

Лемма №2: от каждого ученика уходит равное количество галочек.

Т.к. нету учеников у которых 2 ребра уходят в одну вершину т.к. ребенок 1 раз числится в кружке $\Rightarrow$ если у ученика x ребер то галочек $\frac{(x-1)x}{2}$ т.к. мы считаем сколько различных пар ребер.

Т.к. у учеников одинаковое количество кружков $\Rightarrow$ одинаковое количество ребер $\Rightarrow$ одинаковое количество галочек у каждого

Из Леммы №1 и Леммы №2 следует что (a - количество учеников)

$63 \vdots a$ т.к. $63 = a\cdot\frac{(x-1)x}{2} \Rightarrow a$ может быть равно т.к. $a\in N$ 1, 3, 7, 9, 21, 63.

Т.к. $6 < a < 63 \Rightarrow a$ может быть равно 7, 9 или 21

Лемма №3: количество учеников ~~7, 9 или 21~~ может быть равно только 7, 9 и 21 (может для кого-то из них не получиться, но для других точно не работает)

№2 (продолжение) Доказательство+

Лемма 4: учеников может быть только 21 ~~или 7~~

1) Проверим получиться ли если $a=7$

$63 = 7 \cdot \frac{(x-1)x}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)x}{2} = 9 \Rightarrow (x-1)x = 18$, но таких натуральных x несуществует т.к. $3\cdot 4 < 18 < 4\cdot 5$

2) Проверим получиться ли если $a=9$

$63 = 9 \cdot \frac{(x-1)x}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)x}{2} = 7 \Rightarrow (x-1)x = 14$, но таких натуральных x не существует т.к. $3\cdot 4 < 14 < 4\cdot 5$

3) Проверим получиться ли если $a=21$

$63 = 21 \cdot \frac{(x-1)x}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)x}{2} = 3 \Rightarrow (x-1)x = 6 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow$ при $a=21$ получиться и от каждого ученика выходит $x=3$ ребра

Пример: пример +

~~рассм~~ 1, 2, 3, ... – ученики

1 кружок – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

2 кружок – 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15

3 кружок – 1, 2, 3, 16, 17, 18, 19, 20, 21

4 кружок – 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 18

5 кружок – 4, 5, 6, 13, 14, 15, 19, 20, 21

6 кружок – 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 20, 21

7 кружок – 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18

Ответ: в таком классе 21 ученик.

№3 (начало)

Лемма №1: если в дроби $\frac{a}{b}$ $b \geq a$ то $\frac{a+c}{b+c} \geq \frac{a}{b}$ $(a,b \geq 0)$

если $a \geq 0$; $b > 0$; $c \geq 0$

$\frac{a}{b} \vee \frac{a+c}{b+c}$ $c>0$

$ab+ac \vee ab+bc$

$ac \vee bc$ т.к. $c>0$ с сокращается с тем же знаком

$a \vee b \Rightarrow$

$a \leq b \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c}$ Доказано

если $c=0$ то остается как было т.к. $\frac{a}{b} = \frac{a+0}{b+0}$ доказано

Лемма №2: $(a-1)^2; (b-1)^2; (c-1)^2 \leq 1$

Если мы хотим доказать что $(a-1)^2; (b-1)^2; (c-1)^2 \leq 1$

достаточно доказать, что $-1 \leq (a-1); (b-1); (c-1) \leq 1$. т.к. у чисел x у которых $|x|>1$ $x^2>1$ т.к. $(1+y)(1+y)>1$ $y>0$

1) То что $-1 \leq (a-1); (b-1); (c-1)$ очевидно т.к. $a,b,c \geq 0$ по условию

2) $(a-1); (b-1); (c-1) \leq 1 \Rightarrow a,b,c \leq 2$

Допустим это не так $\Rightarrow a \geq b \geq c$ ← можно так сделать т.к. выражение симметрично.

и $a>2$ (т.к. если $a \leq 2$ то b и c тоже).

Докажем, что тогда разница между a и a^2 больше 2. $(a^2 > a+2)$

$a = x+2$, где $x>0$

$(2+x)^2 \vee (2+x)+2$

$4+4x+x^2 \vee 2+x+2$

$3x+x^2 \vee 0$ ← больше 0 т.к. $x>0$

$3x+x^2>0 \Rightarrow (2+x)^2 > (2+x)+2$ Доказано

№3 (продолжение)

Из того что $a^2 > a+2$ следует что $b^2+c^2 < b+c-2$

т.к. $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$

$b^2+c^2 < b+c-2$ — такого быть не может т.к.

Допустим, что может, тогда ~~како~~ b или c больше чем на 1 больше своего квадрата т.к. $b^2+c^2+2<b+c$, а такого быть не может т.к. (НУО допустим это b т.к. нигде не пользуемся что $b \geq c$)

1) если $b=0$ то $b^2=b=0$

2) если $0<b<1$ то $0<b<1$ и $0<b^2<1 \Rightarrow b-b^2<1$ (т.к. $0<b<1$, $0<b^2<1$)

(т.к. они лежат на отрезке длины <1)

3) если $b \geq 1$ то $b = 1+x$ $x \geq 0$

$(1+x)^2 \vee 1+x$

$1+2x+x^2 \vee 1+x$

$x+x^2 \vee 0$

$x+x^2 \geq 0 \Rightarrow (1+x)^2 \geq 1+x \Rightarrow b \leq b^2$

Т.к. других случаев нет когда $b \geq 0$ то получается что такого не может быть что бы $b-b^2>1 \Rightarrow$ не может быть $a>2$

$\Rightarrow a \leq 2 \Rightarrow a,b,c \leq 2 \xRightarrow{\text{т.к. } a \geq b \geq c} (a-1);(b-1);(c-1) \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq (a-1);(b-1);(c-1) \leq 1 \Rightarrow (a-1)^2;(b-1)^2;(c-1)^2 \leq 1$

№3 (продолжение)

Из Леммы №2 следует что $(a-1)^2; (b-1)^2; (c-1)^2 \le 1$
$\Rightarrow$ числитель каждой дроби в левой части ≤ 1 и ≥ 0, а знаменатель каждой дроби в левой части ≥ 1 т.к. $a, b, c \ge 0$
$\Rightarrow$ можно воспользоваться Леммой №1.

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}; \quad \frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}; \quad \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1}$$

Если доказать неравенство с полученными дробями, то изначальное тоже будет верно т.к. мы увеличивали либо оставляли такими же дроби в меньшей части.

$$\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} + \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} + \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} \vee \frac{3}{a+b+c+1}$$

$$\frac{a^2-a+1}{a+b+c+1} + \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1} + \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1} \vee \frac{3}{a+b+c+1}$$

$-a-b-c=-a^2-b^2-c^2$ по условию $a+b+c=a^2+b^2+c^2 \ | \cdot(-1)$
$-a-b-c=-a^2-b^2-c^2$

$$\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} \vee \frac{3}{a+b+c+1}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2-a^2-b^2-c^2+3}{a+b+c+1} \vee \frac{3}{a+b+c+1}$$

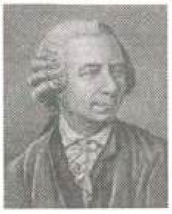
$$\frac{3}{a+b+c+1} \vee \frac{3}{a+b+c+1}$$

$$\frac{3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1}$$ Доказано

Т.к. левую часть мы либо увеличили, либо оставили прежней то:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{a+b+c+1}$$

Доказано.



Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 . 1А
аудитория – посадочное место

41306297
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ МГ (?)	+ КН	–. А.П.	Ф КА	
7 ВС	7 МС	1 КН	0 МК	15
7 АА				

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 класс | 41306297 номер участника | лист 1 из 5

№ 5.

~~Лемма №1~~ Разобьём доску 30×30 на ~~225~~ непересекающиеся квадратов 2×2, так же как 4×4 на рисунке 1

их будет 15×15 ⇒ 225 квадратов

~~назовем квадрат~~

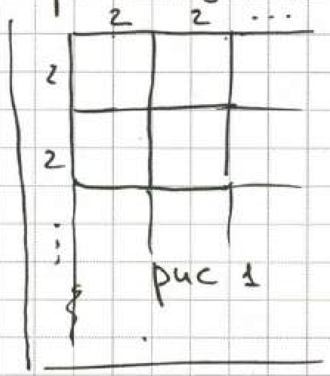


рис 1

Лемма №1: ~~в~~ среди 225 полученных квадратов 2×2 будет ровно 5 без королей.

В одном квадрате 2×2 может стоять не более 1 короля т.к. в какую клетку его не поставь он будет бить соседние по стороне, и по диагонали ⇒ если стоит 220 королей, то занято 220 квадратов т.к. квадраты не пересекаются ⇒ 225−220=5. 5 свободных квадратов 2×2

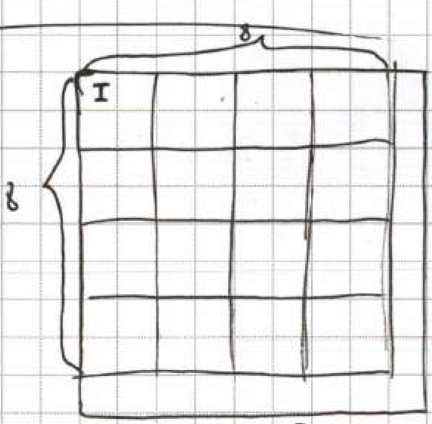


рис. 2

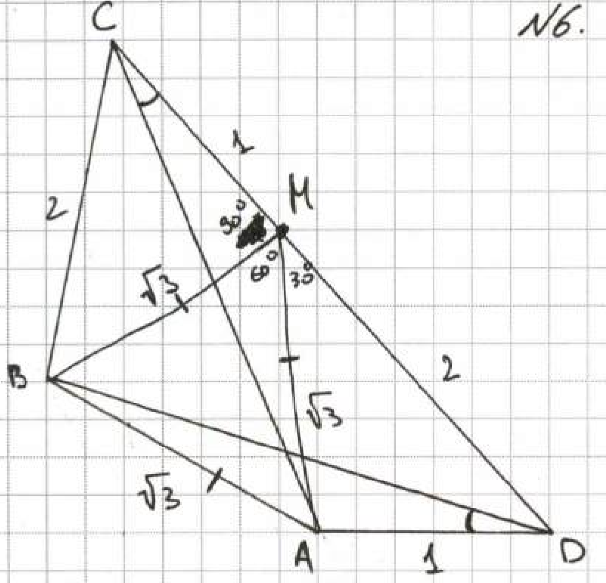
В квадрате 9×9 можно выделить 16 непересекающихся квадрата 2×2 (рис 2).

Т.к. в квадрате не более 5 пустых квадратов 2×2 ⇒ $16-\leq 5=\geq 11$ ⇒

не менее 11 с королями. Доказано

* На рисунке 2 один из способов. Нам надо поставить ~~так~~ разбитый квадрат 8×8 так что бы он совпадал с изначальным разбиением. Это можно сделать потому что ~~пронумеруем~~ в каждой клетке 1×1 есть вершина ~~изначальные клетки в него~~ квадрата 2×2 ⇒ очевидно у клетки I тоже есть такая вершина и можно приставить самый верхний левый угол квадрата 8×8 к ней. Очевидно он также будет внутри квадрата 9×9. (т.к. с ~~каждой др~~ низу и справа запас 1 клетка)

№6. (начало)



Дано
$\angle BAD = 150^\circ$
$\angle ACD = \angle$ ~~BAD~~ ADB
$CD = 3$
$AD = 1$
$AC = BD$
Найти
$BC = ?$

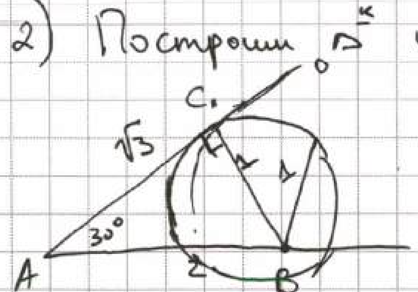
Лемма №1: в Δ-ке с углом 30°, со стороной длины 2 прилежащей к $\angle = 30^\circ$ и стороной длины 1 противолежащей $\angle = 30^\circ$ углы равны $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. и стороны равны $1, 2$ и $\sqrt{3}$ и между сторонами 1 и 2 лежит $\angle = 60^\circ$

Доказательство:

1) ~~Си~~ По неравенству Δ-ка существует Δ-к со сторонами $1, 2$ и $\sqrt{3}$ т.к. $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{3} > 2$; $2 + 1 > \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3} > 1$.

Так же по обратной Th Пифагора мы знаем что этот Δ-к прямоугольный т.к. $\sqrt{3}^2 + 1^2 = 2^2$, так же в нем углы $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ т.к. катет в 2 раза меньше гипотенузы

2) Построим Δ-к из леммы 1 $\Big|$ $\angle OAB = 30^\circ$, $AB = 2$ и $C \in AO$



И мы знаем что $BC = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ строим окружность радиусом 1 с центром в точке B.

C_1 точно есть из 1). Так же всего точек C 1-а или 2-е.

Построим Δ-к из 1) $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$ AC касательная к окружности $\Rightarrow$ точка C одна. Доказано
$\Rightarrow \angle B = 60^\circ$ по сумме $\angle$ в Δ-ке

№6 (продолжение)

Лемма №2: $BC=2$

1) Построим CM на отрезке CD так что $CM=AD=1$.

$\Rightarrow MD=CD-CM=2$

2) $\triangle CMA=\triangle BAD$ т.к. по 2-м сторонам и углу между ними ($AD=CM$; $AC=BD$; $\angle ACM=\angle ADB$) $\Rightarrow AB=AM$ и $\angle CMA=\angle BAD=150^\circ$

3) $\angle CMA=150^\circ \Rightarrow$ смежный к нему $\angle AMD=30^\circ$

4) По лемме 1 $\triangle AMD$ - прямоугольный $\angle MAD=90^\circ$ и $AM=\sqrt{3}$.

5) $\triangle ABM$ равнобедренный ($AB=AM$) и $\angle BAM=150^\circ-90^\circ=60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABM$ равносторонний $\Rightarrow AB=AM=BM=\sqrt{3}$ и $\angle BMA=60^\circ$

6) $\angle BMC=180^\circ-\angle BMA-\angle AMD=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$

7) По Th Пифагора в прямоугольном $\triangle$-ке BCM

$BC^2=BM^2+CM^2 \Rightarrow BC^2=\sqrt{3}^2+1^2 \Rightarrow BC^2=4 \Rightarrow BC=2$

Ответ: $BC=2$

№7. (начало)   н – нечетное   ч – четное

Есть 4 варианта: 1, 2, 3 или 0 нечетных чисел (среди a, b, c)

~~Есть 4 варианта: 0, 1, 2 или 3 четных числа (среди a, b, c)~~

1) Если 0 четных чисел то в каждой скобке сумма нечетна

т.к. (н·н+н+1) = (н+н+н) = н

Но abc+1 четно т.к. н·н·н+1 = н+1 = ч

~~Тог.~~ Но тогда левая часть не делиться на правую т.к.

Левая часть ⋮̸ 2, а Правая часть ⋮ 2.

~~2) Если 3 четных числа => a=2x b=2y c=2z~~

~~Каждая скобка в левой части сравнима с 3 по модулю 4~~

~~т.к.~~

~~(2x 2y+~~

~~Если 1 четное => a=2x b=2y+1 c=2z (выражение симметрично неважно какое четное)~~

~~1я скобка = $\left(\underbrace{2x(2y+1)}_{ч}+\underbrace{a}_{ч}+\underbrace{1}_{н}\right) \Rightarrow н$~~

~~2я скобка = $\left(\underbrace{(2y+1)(2z)}_{ч}+\underbrace{b}_{н}+\underbrace{1}_{н}\right) \Rightarrow ч$~~

~~3я скобка = $\left(\underbrace{2z+2x}_{ч}+2\right.$~~

2) Одна скобка в левой части должна полностью сократиться т.к. иначе будет ≥3 простых делителей

3) Если 1 четное => $a=2x$ $b=2y+1$ $c=2z+1$ (выражение симметрично, поэтому неважно какое четное)

$abc+1$ – нечетное т.к. abc – четное

В левой части:

1я скобка $=\left(\underbrace{2x(2y+1)}_{ч}+\underbrace{a}_{ч}+\underbrace{1}_{н}\right) \Rightarrow н$

2я скобка $=\left(\underbrace{(2y+1)(2z+1)}_{н}+\underbrace{b}_{н}+\underbrace{1}_{н}\right) \Rightarrow ч$

3я скобка $=\left(\underbrace{(2z+1)2x}_{ч}+\underbrace{c}_{н}+\underbrace{1}_{н}\right) \Rightarrow ч$

$\Rightarrow$ во 2й и 3й скобке 2 не сократится $\Rightarrow p^2=2^2$

№7 (продолжение)

Т.к. 2 четных $\Rightarrow (bc+b+1) \vdots 2$, но $\not\vdots 4$ и $(ac+c+1) \vdots 2$, но $\not\vdots 4$.

т.к. a – четно $\Rightarrow \frac{ac+c+1}{2} \geq c$ (т.к. $a \geq 2$)

Скобка $(ab+a+1)$ целиком должна сократится ~~т.к. $(ab+a+1) \vdots 2$~~

из 2) $\Rightarrow$ останется хотя бы $(ab+b+1)c = abc+bc+c$

$abc+bc+c > abc+1$ т.к. $abc=abc$, а $1 < bc+c$ т.к. $c, bc \geq 1$

$\Rightarrow$ ~~против~~ будут еще простые делители т.к. несократится целиком $\Rightarrow$ противоречие

4) Если 2 четных числа $\Rightarrow a=2x$ $b=2y$ $c=2z+1$

$abc+1$ – нечетно т.к. abc – четно

1-я скобка $\left(\frac{2x\cdot 2y}{2}+\frac{2x}{2}+\frac{1}{н}\right) \Rightarrow$ ~~четно~~ нечетно

2-я скобка $\left(\frac{2y(2z+1)}{2}+\frac{2y}{2}+\frac{1}{н}\right) \Rightarrow$ нечетно

3-я скобка $\left(\frac{(2z+1)2x}{2}+\frac{(2z+1)}{н}+\frac{1}{н}\right) \Rightarrow$ четно

как и в 3) 2 в 3-й скобке несократится $\Rightarrow p^2 = 2^2$

$\Rightarrow$ 1-я и 2-я полностью сокращаются $\Rightarrow$

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1) < abc+1$

$ab^2c+abc+bc+ab^2+ab+b+ab+a+1 < abc+1$

$ab^2c+bc+ab^2+ab+b+ab+a<0$, но это не так $\Rightarrow$ противоречие

Про четные

5) Допустим все четные, тогда $a=2x$ $b=2y$ $c=2z$

$abc+1$ – нечетное остаток 1 по модулю $4 = 4q+1$

1-я скобка $(2x\cdot 2y+2x+1)$ – остаток 3 по модулю $4 = 4l+3$

2-я скобка $(2y\cdot 2z+2y+1)$ – остаток 3 по модулю $4 = 4k+3$

3-я скобка $(2z\cdot 2x+2z+1)$ – остаток 3 по модулю $4 = 4n+3$

Почему?

$(4l+3)(4k+3)(4n+3) \vdots 4q+1 \equiv_4 3$, но у квадратов $\equiv_4 1 \Rightarrow$ противоречие

Ответ: нет, нельзя т.к. перебрали все случаи и во всех противоречие