РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия МИХАЙЛОВА

Имя: СОФЬЯ

Отчество: ВИТАЛЬЕВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион республика Татарстан

4. Контактный телефон +7 937 773 17 51

5. Контактный электронный адрес re16@bk.ru

10:44 – 10:48

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте заметим, что если число n хорошее, то оно представимо в виде суммы $n = a_1+1 + a_1+2 \dots + a_1+k = a_1 k + \frac{k(k+1)}{2}$, $a \geq 0$ $a \in \mathbb{Z}$

Заметим, что число n не может быть и 2-хорошим и 4-хорошим, т.к. если число n 2-хорошее, то $n = 2a_1+3$, при этом если n 4-хорошее, то $n = 4a_2+10$, тогда

$2a_1+3 = 4a_2+10$, но $2a_1+3$ - нечетное, $4a_2+10$ - четное.

Противоречие.

Всего нат. чисел $\geq 1, < 7$ - 5 (2, 3, 4, 5, 6). При этом за 2 или 4 Вася не получил „5". => всего он получил $\leq$ 4 „5".

Пример на 4 пятерки:

$n = 45$.

2-хорошее: $n = 22+23$.

3-хорошее: $n = 14+15+16$.

5-хорошее: $n = 7+8+9+10+11$.

6-хорошее $n = 5+6+7+8+9+10$.

Ответ: 4.

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Назовём галочкой 2 ребра, выходящие из одной вершины.

Введем граф, в котором вершины - дети и кружки, кружок соединен с ребенком, если соответствующий ребенок ходит в этот кружок.

У нас получится двудольный граф, в котором в первой доле - 7 вершин (кружки), а во второй x вершин (дети).

Посчитаем количество галочек, выходящих из вершин, соответствующих детям.

С одной стороны, если каждый ребенок ходит в y кружков, то галочек $x \cdot \frac{y(y-1)}{2}$ (из каждой вершины-ребёнка исходит $y(y-1)/2$ галочек).

С другой стороны их $\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3$. Т.к. любая галочка, участвующая в нашем подсчете исходит ровно с 2 вершины из вершин-кружков, а в условии сказано, что существует 3 ребенка, ходящих в оба кружка, тогда для любой пары кружков существует по 3 их галочки. Тогда всего галочек $\frac{6 \cdot 7}{2} \cdot 3$

Тогда

$$x \cdot \frac{y(y-1)}{\cancel{2}} = \frac{6 \cdot 7}{\cancel{2}} \cdot 3$$

$$x\, y\,(y-1) = 6 \cdot 7 \cdot 3 = 7 \cdot 3^2 \cdot 2 = 126$$

По условию $x > 6 \Rightarrow y \cdot (y-1) < \frac{7 \cdot 3^2 \cdot 2}{6} = 21$.

Заметим, что если $y > 5$ $y \cdot (y-1) > 6 \cdot 5 = 30 > 21$. Противоречие

$y \leq 5$.

Тогда y может быть от 1 до 5.

$1 \cdot 0 \cdot x = 0 \neq 126$

$2 \cdot 1 \cdot x = 126$ — $x = 63$, но по условию $x < 60$

$3 \cdot 2 \cdot x = 126$

$4 \cdot 3 \cdot x \neq 126$, т.к. $126 \not\vdots 4$

$5 \cdot 4 \cdot x \neq 126$, т.к. $126 \not\vdots 4$.

x может быть равен только $\frac{126}{6} = 21$

из условия следует существование x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: 21.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Мы знаем, что ~~$(a-1)$~~ $a^2+b^2+c^2=a+b+c$.

Давайте сравним дроби

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \vee \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}$ т.к. $a+b+c+1>0$, $b+c+1>0$, то можно домножить обе части неравенства, знак не поменяется

$(a-1)^2(a+b+c+1) \vee (b+c+1)(a^2-a+1)$

$(a^2-2a+1)(a+b+c+1) \vee (b+c+1)(a^2-a+1)$

$\underline{(a^2-2a+1)(b+c+1)}+a(a^2-2a+1) \vee \underline{(b+c+1)(a^2-2a+1)}+a(b+c+1)$

(вычтем из обеих частей $(a^2-2a+1)(b+c+1)$, знак не поменяется)

$a(a^2-2a+1) \vee a(b+c+1)$ т.к. $a\geq 0$ можно поделить на a, знак не поменяется. при $a=0$

$a^2-2a+\cancel{1} \vee b+c+\cancel{1}$ $\quad 0\cdot(a^2-2a+1)=0\cdot(b+c+1)$

$a^2-a \qquad b+c+a$

$\wedge\!\!\backslash \qquad M$

$a^2 \leq a^2+b^2+c^2$

$\Downarrow$

$a^2-a\leq b+c+a \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}$.

Аналогично $\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \leq \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}$, $\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}$.

$\Downarrow$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}+\frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}+\frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}.$$ чтд.

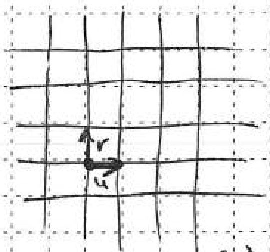
Задача № 4 Лист 1 из 21 Фамилия, имя: Михайлова Софья.

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Оценка на 250:

Давайте все отрезки (звенья ломаной) разобьем на группы параллельных друг другу. Заметим, что для каждой группы параллельных существует группа перпендикулярных им отрезков. Потому что иначе все отрезки этой группы не будет пересекать ни один ⊥ отрезок. (но тогда оценка уже доказана) => групп четно.

Заметим, что если групп всего 2, то все наши звенья — это равные попарно параллельные или перпендикулярные отрезки. Посмотрим на первое (произвольное звено). Введем решетку



у которой один вектор совпадает по длине и направлен произвольно с выбранным звеном. А второй вектор выходит из той же

рис.1. точки, что и первый но перпендикулярен ему.

клетчатая решетка

Тогда все звенья будут совпадать со сторонами клеток и могут пересекаться только в вершинах. Но ~~тогда ответ~~ ~~оце~~ это противоречит условиям задачи. => ~~векторов~~ групп парал. отрезков ≥ 4.

Тогда существует группа с ≤ 250 звеньями, тогда для ⊥ ей группе будет ≤ 250 пересечений. чтд.

Пример (на 2:)

Рассмотрим правильный 1000-угольник. Нет примера.

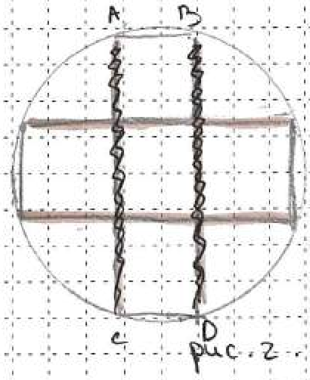


рис. 2.

Рассмотрим его противоположные рёбра. Соединим вершины этих рёбер параллельными отрезками. (как на рис.2)

~~Т.к. 1000 ⋮ 8~~ Проделаем так для всех противоположных рёбер.

Т.к. 1000 ⋮ 8 среди проведенных отрезков для любого найдется ровно 2 перпендикулярных. Тогда если рассмотреть все провед. отрезки (без сторон 1000-угольника), ~~по~~ и 1000 вершин многоуг., то у данной замкнутой ломаной для любого звена будет 2 пересек. перпендикул.

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия М И Х А Й Л О В А

Имя: С О Ф Ь Я

Отчество: В И Т А Л Ь Е В Н А

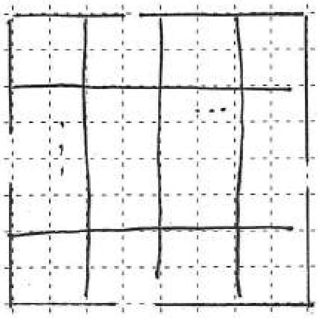
заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион республика Татарстан.

11:08 – 11:11

Задача № 15 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

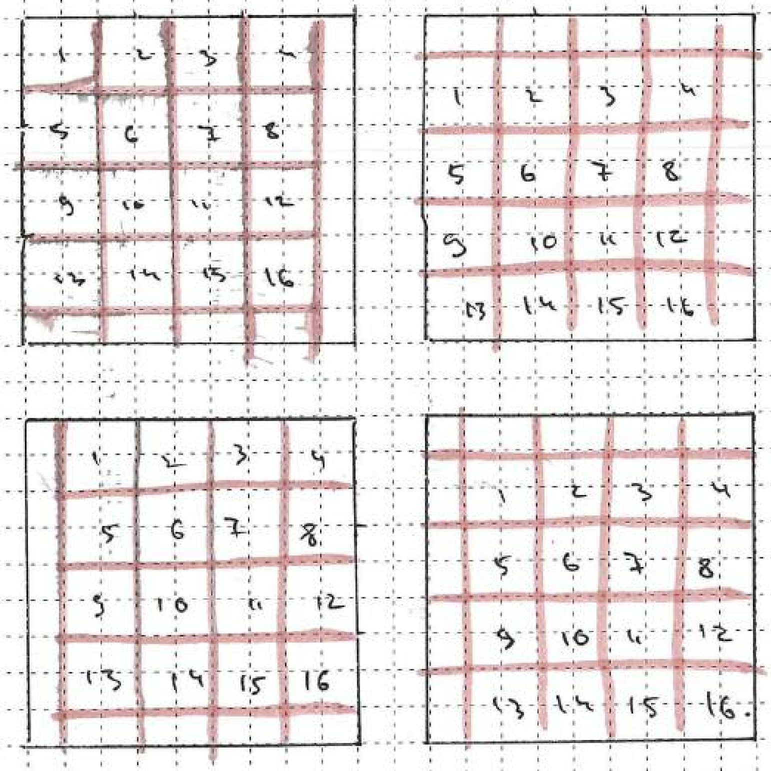


Давайте разобьём весь квадрат 30×30 на 225 (15×15) квадратов 2×2, не налегающих друг на друга.

Заметим, что в каждом квадрате стоит не более 1 короля, т.к. любые 2 ~~короля~~ клетки в квадрате 2×2 граничат по стороне или по диагонали.

Заметим, что если в x ~~из~~ выделеных нами квадратов не стоит короли, то $225 - x = 220$ $x = 5$.

Посмотрим на любой квадрат 9×9.



Заметим, что в квадрате 9×9 целиком умещается $4 \times 4 = 16$ квадратов нашего разбиения 2×2.

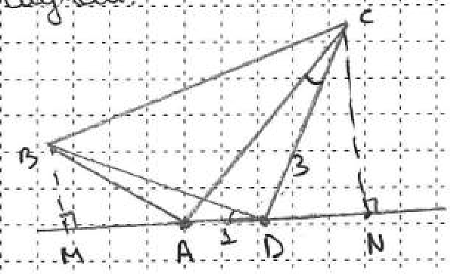
Одним из этих x способов

Заметим, что т.к. все в 5 квадратах нашего разбиения нет королей, то среди этих 16, тоже ≤ 5 нет королей $\Rightarrow$ $\geq$ в и есть $\Rightarrow$ королей в любом 9×9 ≥ 11 чтд.

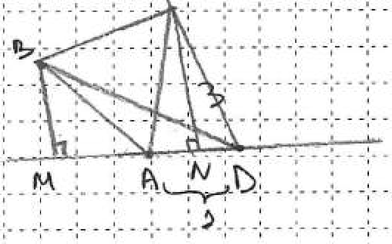
Задача № 6 Лист 1 из 4 Фамилия, имя: Михайлова Софья.

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

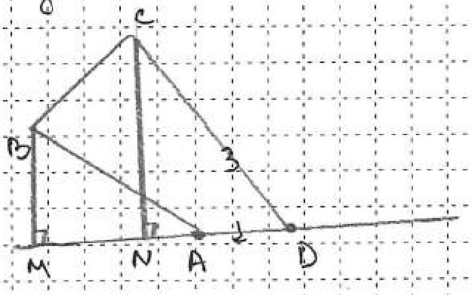
1 случай:



2 случай:



3 случай:



Реш.

Заметим, что ~~высо~~ перпендикуляр из B на AD падает на прямой AD за точку A, т.к. $\angle BAD$ — тупой.

Пусть M — это основание перпендикуляра из B на AD (прямую).

Пусть N — основание перпендикуляра из C на AD.

Заметим, что

$\angle ACD = \angle BDA$ (по усл.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{BDA}} = \frac{AC \cdot CD}{BD \cdot AD} = \frac{3}{1}.$$

Так же

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BDA}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot CN}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BM} = \frac{CN}{BM}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CN}{BM} = \frac{3}{1}.$$

Обозначим длину $BM = a$. $\Rightarrow CN = 3a$.

Разберем 3 случая расположения точки N на прямой AD (на отрезке, на прямой за точку D, на прямой за точку A).

Для всех случаев, заметим, что, т.к. $\angle BAM = 30$, $BM = a$, то по т. Пифагора $AM = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

$$\left.\begin{array}{l} BM = a \\ MD = 1 + \sqrt{3}a \end{array}\right\} \text{ по т. Пифагора } BD = \sqrt{a^2 + (1 + \sqrt{3}a)^2}.$$

Задача № 6 Лист 2 из 4 Фамилия, имя: Михайлова Софья.

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

1 случай. N за точкой D.

Тогда ~~DN = 1~~ по Т. Пифагора $DN = \sqrt{9 - 9a^2} = 3\sqrt{1-a^2}$.

$AC = \sqrt{(3a)^2 + (1+3\sqrt{1-a^2})^2}$

По условию $AC = BD$ $\Rightarrow$

$$\sqrt{(3a)^2 + (1+3\sqrt{1-a^2})^2} = \sqrt{a^2 + (1+\sqrt{3}a)^2}$$ | возведем в квадрат.

$$9a^2 + (3\sqrt{1-a^2}+1)^2 = a^2 + (\sqrt{3}a+1)^2.$$

$$\cancel{9a^2} + 9 - \cancel{9a^2} + \cancel{1} + 6\sqrt{1-a^2} = a^2 + 3a^2 + \cancel{1} + 2\sqrt{3}a.$$

$$9 + 6\sqrt{1-a^2} = 4a^2 + 2\sqrt{3}a \quad | + 1 - a^2.$$

$$3^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{1-a^2} + 1 - a^2 = \cancel{(2a)^2}\ (\sqrt{3}a)^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot a + 1$$

$$(3+\sqrt{1-a^2})^2 = (\sqrt{3}a+1)^2$$

$$3+\sqrt{1-a^2} > 0, \quad \sqrt{3}a+1 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$3+\sqrt{1-a^2} = \sqrt{3}a+1 \quad | -1$$

$$2+\sqrt{1-a^2} = \sqrt{3}a$$ | возведем обе части в квадрат.

$$4 + 1 - a^2 + 4\sqrt{1-a^2} = 3a^2$$

$$\cancel{5}\ 4 - 4a^2 + 4\sqrt{1-a^2} + 1 = 0.$$

$$(\underbrace{2\sqrt{1-a^2}+1}_{>0})^2 = 0.$$

Противоречие $\Rightarrow$ Точка N так располагаться не может.

2 случай + 3 случай:

По Т. Пифагора $DN = \sqrt{3^2 - 3^2a^2} = 3\sqrt{1-a^2}$

Тогда ~~$AC = \sqrt{(3a)^2 + \ldots}$~~ $AC = \sqrt{(3a)^2 + (1-3\sqrt{1-a^2})^2}$.

~~При этом во 2 случае $1-3\sqrt{1-a^2}$~~, ~~а в 3 $1-3\sqrt{1-a^2}$~~

При этом $\boxed{\begin{array}{l}\text{во 2 случае } 1-3\sqrt{1-a^2} > 0 \\ \text{в 3 случа } 1-3\sqrt{1-a^2} < 0.\end{array}}$

Задача № 3б Лист 3 из 4 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

AC=BD. (приравняем их возведем в квадрат)

$(\sqrt{3}a+1)^2+a^2=9a^2+(1-3\sqrt{1-a^2})^2$

$3a^2+2\sqrt{3}a+1+a^2=9a^2+1+9-9a^2-6\sqrt{1-a^2}$

$4a^2+2\sqrt{3}a=9-6\sqrt{1-a^2} \quad \Big| +1-a^2$

$(\sqrt{3}a)^2+2\sqrt{3}a+1=3^2-2\cdot(3\sqrt{1-a^2})+\sqrt{1-a^2}^2$

$(\sqrt{3}a+1)^2=(3-\sqrt{1-a^2})^2.$

Тогда

либо

$\sqrt{3}a+\cancel{1}=\cancel{3}^{2}-\sqrt{1-a^2}\ \cancel{\ }$

$\sqrt{3}a=2-\sqrt{1-a^2}$ | возведем в квадрат

$3a^2=4+1-a^2-4\sqrt{1-a^2}$

$5-4a^2-4\sqrt{1-a^2}=0$

$(2\sqrt{1-a^2})^2-2\cdot2\sqrt{1-a^2}+1=0$

$(2\sqrt{1-a^2}-1)^2=0$

$2\sqrt{1-a^2}=1$

$\sqrt{1-a^2}=\frac{1}{2}$

$1-a^2=\frac{1}{4}$

$a^2=\frac{3}{4} \quad a>0$

$a=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

либо

$\sqrt{3}a+1=\sqrt{1-a^2}-3$

$\sqrt{3}a=\sqrt{1-a^2}-4$ | возведем в квадрат

$3a^2=1-a^2+16-8\sqrt{1-a^2}$

$17-4a^2-8\sqrt{1-a^2}=0.$

$4(1-a^2-2\sqrt{1-a^2}+1)+9=0$

$4(\sqrt{1-a^2}-1)^2+9=0$

$\geqslant 0 \quad > 0$

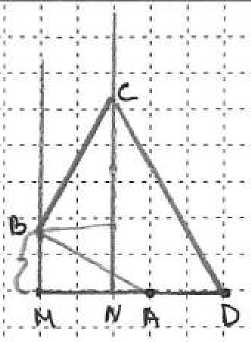
Противоречие.

$1-3\sqrt{1-a^2}=1-\frac{3}{2}=-0.5<0 \Rightarrow$ мы в 3 случае. N за точкой A.

$a=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MA=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

Задача № 6 Лист 4 из 4 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

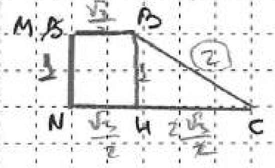


$DN = 3\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}$ N за точку A $\Rightarrow$

$\Rightarrow AN = \frac{1}{2}$.

Тогда посмотрим на прямоугольную трапецию MBCN

$MN = 1$ $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



Опустим из B на CN высоту BH

$NH = BM$ (NMBH - прямоуг) $\Rightarrow NH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$CH = CN - HN = 3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

по Т. Пифагора $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 1 + 3$

$BC = 2$.

Ответ: 2.

Задача № 37 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Михайлова Софья.

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=(abc+1)\cdot p^2$.

Предположим частное равно p^2, где p-простое.

Заметим, что либо 2 скобки $\vdots\, p$ из $(ab+a+1)$, $(bc+b+1)$, $(ac+c+1)$ либо одна из них делится на p^2. Т.к p-простое

Заметим, что

$$\left.\begin{aligned}
&(ab+a+1)(bc+b+1) > abc\cdot b+ab+1 > abc+1\\
&(ab+a+1)(ac+c+1) > a\cdot abc+a+c > abc+1\\
&(bc+b+1)(ac+c+1) > c\cdot abc+b+c > abc+1
\end{aligned}\right\}\ \text{произведение любых 2-х скобок} > abc+1$$

$\Downarrow$

если одна из скобок бы делилась на p^2, она >0, то произведение оставшихся двух было бы $> abc+1$, но тогда произведение всех трех не было бы $(abc+1)p^2$. Противоречие

$\Downarrow$

2 скобки делятся на p, а оставшаяся является делителем $abc+1$.

1 вариант:

~~Пусть НУО~~ $\begin{matrix} bc+b+1 \vdots p \\ ac+c+1 \vdots p \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} bc+b+1 \vdots p \\ abc+bc+b \vdots p \end{matrix}\right\}_{\text{вычтем}}$ $abc-1 \vdots p$.

$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow \left.\begin{matrix} abc+ab+a \vdots p \\ abc-1 \vdots p \end{matrix}\right\}_{\text{вычтем}}$ $\cancel{abc}$ $ab+a+1 \vdots p$.

Но $ab+a+1$ является в данном случае делителем $abc+1 \Rightarrow abc+1 \vdots p$ и $abc-1 \vdots p \Rightarrow p=2$.

Аналогично:

2 вариант:

$\begin{matrix} bc+b+1 \vdots p \\ ab+a+1 \vdots p \end{matrix}$ $\rightarrow \left.\begin{matrix} abc+ab+a \vdots p \\ ab+a+1 \vdots p \end{matrix}\right\}_{\text{вычтем}} \Rightarrow abc-1 \vdots p$

$ab+a+1 \vdots p \Rightarrow \left.\begin{matrix} abc+ac+c \vdots p \\ abc-1 \vdots p \end{matrix}\right\}_{\text{вычтем}} \Rightarrow ac+c+1 \vdots p$

Но $ac+c+1$ является делителем $abc+1 \Rightarrow abc+1 \vdots p$ и $abc-1 \vdots p \Rightarrow p=2$.

Задача № 37 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Михайлова Софья

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Аналогично.

3 вариант:

$\left.\begin{array}{l} ac+c+1 \vdots p \\ ab+a+1 \vdots p \Rightarrow abc+ac+c \vdots p \end{array}\right\} abc-1 \vdots p.$

$ac+c+1 \vdots p \Rightarrow \left.\begin{array}{l} abc+bc+b \vdots p \\ abc-1 \vdots p \end{array}\right\} bc+b+1 \vdots p.$

Но в данном случае $bc+b+1$ - делитель $abc+1 \Rightarrow abc+1 \vdots p$, $abc-1 \vdots p \Rightarrow p=2$.

Мы поняли, что во всех случаях $p=2 \Rightarrow$ и $abc+1 \vdots p$ $abc+1 \vdots 2$.

$abc+1 \vdots 2 \Rightarrow abc$ - нечетно $\Rightarrow$ все числа a, b, c - нечетны.

$\left.\begin{array}{l} ab+a+1 \text{ - нечетно} \\ bc+b+1 \text{ - нечетно} \\ ac+c+1 \text{ - нечетно} \end{array}\right\}$ $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) \not\vdots 2$

Противоречие.

$\Downarrow$

$p \neq 2$ и не равно ничему другому

$\Downarrow$

Ответ: нет.