10:00 – 10:02; 11:20 – 11:23; 12:09 – 12:11

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия М И Т Ь К И Н Ы Х

Имя: М И Р О Н

Отчество: О Л Е Г О В И Ч

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Кировская область

4. Контактный телефон 8-919-505-17-55

5. Контактный электронный адрес miroxa0104@icloud.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Мишкиных Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№1

Докажем что число n не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим.

Предположим от противного.

Если он 2-хороший $\Rightarrow$ $n = a + (a+1)$ где $a \in N$

$n = 2a+1 \Rightarrow n \not\vdots 2$

Если оно 4-хороший $\Rightarrow n = b + (b+1) + (b+2) + (b+3) =$ ($b \in N$)

$= 4b+6 \Rightarrow$ ~~...~~ $n \vdots 2$ $\lightning$ т.к. число

$\overset{\shortparallel}{2(2b+3)}$ не может быть одновременно четным и нечетным.

$\Downarrow$

Что Вася мог получить максимум 4 пятерки т.к. если он получил 5 (то есть ~~число~~ максимум) $\Rightarrow$ число n является k-хорошим для всех $1 < k < 7$ $\Rightarrow$ и для 2 и 4 тоже $\lightning$ т.к. одновременно 2-хороший и 4-хороший чисел нет.

Пример на 4 Пусть $n = 45$

1) $45 = 22+23 \Rightarrow 45$ - 2хороший

2) $45 = 14+15+16 \Rightarrow 45$ - 3-хороший

3) $45 = 7+8+9+10+11 \Rightarrow 45$ - 5-хороший

4) $45 = 5+6+7+8+9+10 \Rightarrow 45$ - 6-хороший

Ответ: 4.

Задача № 2 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Мильчмык Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№2

Давайте будем брать два ~~множества~~ кружка и ~~модели~~ ученикам которые есть в этих двух кружках одновременно будем им давать по 1 монете.

Посчитаем ~~монеты~~ деньги двумя способами.

1 сп.

~~Со стороны множеств~~ Сколько ~~множеств~~ кружки отдали. Взять любые два ~~множества~~ кружка C_7^2 способов и уже ровно 3 человека в пересечении

⇓

Всего денег $C_7^2 \cdot 3$.

2 сп.

Посчитаем сколько получил каждый ученик. Пусть их всего n и каждый входит в k кружков $\Rightarrow 6 < n < 60$ и $1 \leq k \leq 7$.

Каждый ученик получил столько денег сколько раз он был в пересечении двух кружков т.к. он ~~в~~ всего в k кружках $\Rightarrow$ в пересечениях он был $C_k^2 \Rightarrow$ он получил C_k денег $\Rightarrow$ Всего денег было получено $C_k^2 \cdot n$

$C_k^2 n = \#$ денег $= C_7^2 \cdot 3$

⇓

$C_k^2 \cdot n = C_7^2 \cdot 3$

Задача № 2 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Митькин Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

- Если $k=1$ $C_1^2 \cdot n = 0 \cdot n = 0$ $0 \neq C_7^2 \cdot 3$ $\lightning$
- Если $k=2$ $C_2^2 \cdot n = n = C_7^2 \cdot 3$ $n = 7 \cdot 9 = 63$ $\lightning$ т.к. $n < 60$
- Если $k=3$ $C_3^2 \cdot n = 3 \cdot n = 7 \cdot 9$ $n = 21$ подходит
- Если $k=4$ $C_4^2 \cdot n = \underbrace{6 \cdot n}_{\vdots 2} = \underbrace{7 \cdot 9}_{\not\vdots 2}$ $\lightning$
- Если $k=5$ $C_5^2 = \underbrace{10 n}_{\vdots 2} = \underbrace{7 \cdot 9}_{\not\vdots 2}$ $\lightning$
- Если $k=6$ $C_6^2 = \underbrace{15 n}_{\vdots 5} = \underbrace{7 \cdot 9}_{\not\vdots 5}$ $\lightning$

$\Downarrow$

Единственный случай это когда $k=3$ $n=21$. т.к. такая ситуация произошла пример не нужен.

Ответ: 21.

Задача № 3 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Мельниких Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№3

Докажем что $a<2$ $b<2$ $c<2$

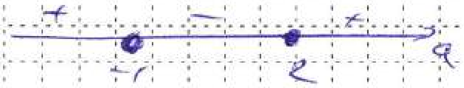
Предположим от противного что хотя бы 1 число больше (или равно) 2 НУО (так можно потому что $a+b+c = a^2+b^2+c^2$ — это равенство симметрично)

$a \geq 2$

$a^2 - a \geq 2$

~~$D = 1^2 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2$~~

$(a+1)(a-2) \geq 0$



$a \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ что неравенство правда т.к. $a \geq 2$ => это неравенство правда

$a^2+b^2+c^2 = a+b+c$

$\Updownarrow$

$2 \leq a^2 - a = b + c - b^2 - c^2$

Докажем что для любого x $x \in R$

$x - x^2 < 1$

$x^2 - x + 1 > 0$

$D = 1 - 4 = -3 < 0$ и ветви направлены вверх => это правда для всех x

$2 \leq a^2 - a = \underbrace{b - b^2}_{<1} + \underbrace{c - c^2}_{<1} < 2$ ↯ т.к.

число не может быть одновременно ≥ 2 и <2 => $a<2$ $b<2$ и $c<2$

$\Updownarrow$

$(a-1)^2<1$ $(b-1)^2<1$ и $(c-1)^2<1$ <= $(a-1)<1$ $(b-1)<1$ $(c-1)^2$

т.к. $-1<a-1<1$ показано а для других аналогично.

Задача № 3 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Мирошных Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

т.к. $b+c>0$

$(a-1)^2<1 \Rightarrow (a-1)^2<b+c+1 \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1}$ - правильная дробь

лемма:

$\frac{x}{y}$ - если $x>y$ (дробь правильная) $\frac{x+a}{y+a}>\frac{x}{y}$

при $a>0$

$\cancel{xy}+ya \overset{?}{>} \cancel{xy}+ax \quad |:a$

$y>x$ правда

$\Downarrow$

т.к. $a>0$

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}<\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$ - по лемме и далее

так со всеми дробями.

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}<\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}+\frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}+$$

$$+\frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1}=\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+a+b+c}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+a+b+c+3}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{\cancel{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)}+3}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}$$ ч.т.д.

Задача № 4 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Митькинах Мирон

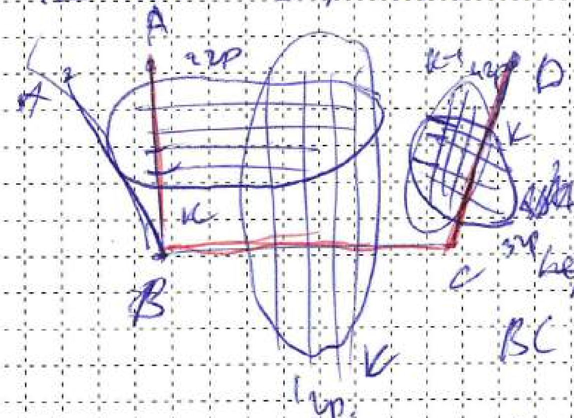
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Оценка на ~~[illegible]~~

Возьмем звено у которого хотябы 1 соседнее звено не $\perp$ самому себе (такие есть т.к. тогда бы ломаная противоречила в квадрате)

Почему такие $\exists$?

Пусть это будут звенья с вершинами A, B, C, D



Пусть $CD \not\perp BC$

Нам нужно еще хотябы k звеньев которые ~~пересека~~ перпендикулярны BC пусть они в 1 группе

1) Предположим $AB \perp BC$ тогда надо еще хотябы k звеньев которые перпендикулярны AB и звеньям из 1 группы, пусть они во 2 группе. Заметим что они будут $\parallel BC \Rightarrow$ они отличаются от звеньев 1 гр. Тогда для CD надо еще k звеньев которые ему перпендикулярны пусть это группа 3. Группа 3 не совпадает с группами 1 и 2 т.к. эти звенья они не $\parallel$ и не $\perp BC$ и звенья 3 гр тоже нужны перпендикулярные им хотябы $k-1$ (еще CD) и они НСО $\Rightarrow$ они не совпадают с другими

$\Downarrow$

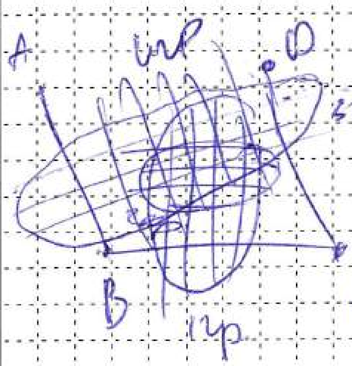
их всего хотябы $4k+2 \le 1000 \Rightarrow k \le 249$

Почему?

Задача № 4 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Митькиных Мирон

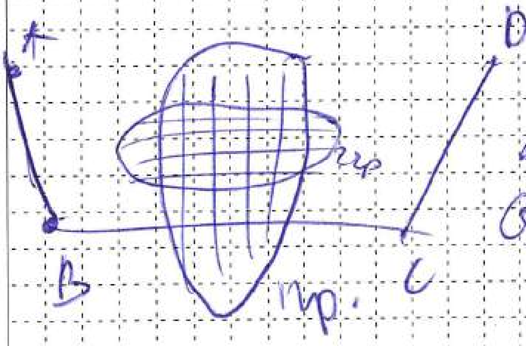
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

2сл. Если AB не ⊥ BC и AB || CD



Тогда для звеньев 1гр и 2гр пункты перпендикулярны между они во второй и их хотьбы k-1. Для AB и DC пункты перпендикулярны их хотьбы k и пусть это 3 гр. и они будут не || BC и не ⊥ BC ⇒ они ни с чем не совпадают и для ~~их прямых~~ 3гр тоже пункты ~~не~~ ⊥ они будут || AB и DC и их хотьбы k-2 и они не пересекаются с 1,2 и 3 гр. ⇒ Всего их хотьбы 4k $4k \le 1000$ $k \le 250$

3сл. AB не ⊥ BC и AB не || CD



Пусть 1гр и 2гр будут как во 2 случае. А 3 и 4 гр это ⊥ к AB и CD соот. они (по k) не пересекаются т.к. AB не || CD и ~~А~~ эти прямые будут не || и не ⊥ BC ⇒ они не пересекаются с 1 и 2 гр.

⇒

Всего хотьбы $4k+2 \le 1000$ откуда это?

$k \le 249$.

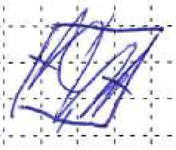
~~⇒~~

~~это $k \le 250$~~

Задача № 4 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Мальканых Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Поймем что 2 случай не возможен когда k=250 т.к. если k=250 то у нас было ~~два~~ звено у кот. его соседа // это значит что вся ломаная превращается в параллел. ~~ромбы~~ т.к. (противоположные стороны = и //) 4i 4 => найдется такое звено у которого два соседа не // и тогда возникает случай (или 2 =)



$\underline{k \le 249}$. Это не доказано.

10:00-10:02; 11:53-11:55; 12:55-12:58

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия МИТЬКИНЫХ

Имя: МИРОН

Отчество: ОЛЕГОВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Кировская область.

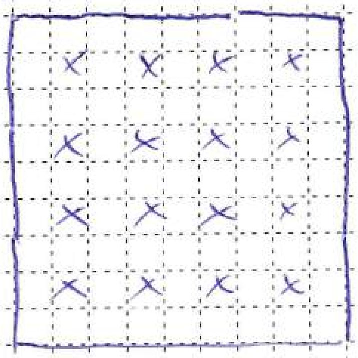
Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Митюнских Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№5

Заметим что на доску 30×30 можно расставить максимум 225 королей (разбить всю доску на квадраты 2×2 и в каждом стоит максимум 1 король. Всего квадратов 2×2 будет 15^2 $\Rightarrow$ всего максимум королей 225).

Докажем что на доске 30×30 без любого квадрата 9×9 стоит максимум 209 коней. Предположим от противного тогда там хотя бы 210 коней. Мысленно вернем квадрат 9×9 и поставим там королей как на рисунке. Заметим



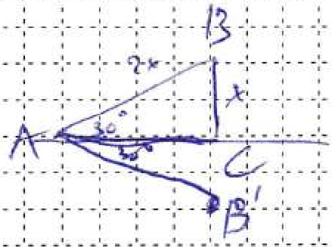
что в квадрате короли не бьют друг друга и короли не из квадрата не бьют королей в квадрате т.к. между ними будет хотя бы 1 клетка (это каемка квадрата 4×4) и тогда всего на доске хотя бы $\cancel{209}\ 210+16=226$ королей ?. т.к. $226>225$. Теперь предположим, что в каком-то квадрате 9×9 меньше 11 королей $\Rightarrow$ их ≤10 в оставшейся части ≤209 $\Rightarrow$ всего их ≤219 ?. т.к. у нас их 220 $\Rightarrow$ в любом квадрате 9×9 ≥11 королей. ч.т.д.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Милюкиных Мирон

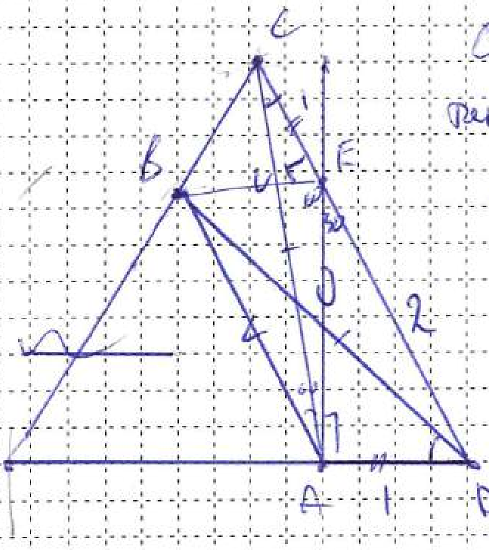
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№6

Лемма: Пусть в $\triangle ABC$ $\angle BAC = 30^\circ$ и $AB = 2BC$. Доказать что $BC \perp AC$.



Отсимметрим точку B относительно AC и получим точку B'. Тогда $\angle BAB' = 2\angle BAC = 60^\circ$ и $BA = B'A$ — в силу симметрии $\Rightarrow \triangle BAB'$ — равносторонний $BB' = AB$. если BC не $\perp AC$ то точки B, C и B' не лежат на 1 прямой $\Rightarrow$ по неравенству $\triangle$ $BC + B'C > BB'$. $BC = B'C$ — в силу симметрии $2BC = BC + B'C > BB' = AB$ ↯, т.к. $2BC = AB \Rightarrow BC \perp AC$ ч.т.д.



Отметим точку E на CD так что $CE = 1 = AD$

$\triangle ACE = \triangle BDA$ по СУС

$CE = AD$ $AC = BD$

$\angle ACD = \angle BDA$

$\Downarrow$

$\angle CEA = \angle BAD = 150^\circ$; $AE = AB$

$\Downarrow$

$\angle AED = 30^\circ$ и $ED = CD - CE = 3 - 1 = 2 = 2 \cdot AD \Rightarrow$

по лемме $EA \perp AD \Rightarrow \angle BAE = \angle BAD - \angle EAD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABE$ — равносторонний $\Rightarrow BE = EA$ и $\angle BEA = 60^\circ \Rightarrow \angle BEC = \angle AEC - \angle BEA = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle BEC$ и $\triangle EAD$ равны по 2 катетам $\Rightarrow BC = ED = 2$

Ответ: 2

Задача № 7 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Митькиных Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Предположим что можно. Пусть
$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=(abc+1)p^2$

Докажем что ни одна из скобок $\vdots p^2$
Предположим от противного что хотя бы 1 скобка $\vdots p^2$ НУО пусть $ab+a+1 \vdots p^2$.
Заметим что все простые отличные от p которые входят в $(bc+b+1)(ac+c+1)$ входят и в $abc+1$ т.к. p^2 - делится только на p.
Теперь степень вхождения p в $abc+1$ пусть k $\Rightarrow$ $p^2(abc+1)$ - $k+2$ $\Rightarrow$ в ЛЧ тоже $k+2$ и в $(ac+c+1)$ хотя бы 2 $\Rightarrow$ в $(bc+b+1)(ac+c+1) \leq k$ $\Rightarrow$
$abc+1 \vdots (bc+b+1)(ac+c+1) \Rightarrow$
$abc+1 \geq (bc+b+1)(ac+c+1) = abc^2+\ldots+bc+1$ ↯
⇓
Ни одна из скобок $\not\vdots p^2$
Докажем что каждая скобка $\vdots p$.
т.к. в ПЧ p входит хотя бы во 2 степени $\Rightarrow$ в ЛЧ тоже $\Rightarrow$ хотя бы две скобки $\vdots p$ $\Rightarrow$ докажем что 3 скобка $\vdots p$ НУО пусть 1 и 2 скобка $\vdots p$

$ab+a+1 \equiv_p 0 \Leftrightarrow a(b+1) \equiv_p -1 \Rightarrow a \not\equiv_p 0$
$bc+b+1 \equiv_p 0 \Leftrightarrow b(c+1) \equiv_p -1$ $b \not\equiv_p -1; 0$
⇓
$c \not\equiv_p 0$ что все слагаемые взаимно просты с p.

$a \equiv_p -\frac{1}{b+1}$ ⇐
$c+1 \equiv_p -\frac{1}{b}$

ОТКУДА $C \not\equiv 0$?

Задача № 7 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Митькиных Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$a \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{b+1}$

$c \underset{p}{\equiv} -\left(\frac{1}{b}+1\right)$

$c(a+1) \underset{p}{\equiv} -\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(1-\frac{1}{b+1}\right) \underset{p}{\equiv}$

$\underset{p}{\equiv} -\frac{b+1}{b}\cdot\frac{b+1-1}{b+1} = -1 \Rightarrow$

что $ac+c+1 \vdots p$ ч.т.д. $\Rightarrow$ что $a \underset{p}{\not\equiv} 0; -1$, $b \underset{p}{\not\equiv} 0; -1$, $c \underset{p}{\not\equiv} 0; -1$

ОТКУДА $a \not\equiv -1$? $c \not\equiv -1$

Тогда каждая скобка $\vdots p$ но $\not\vdots p^2 \Rightarrow$

что степень вхождения p в ЛЧ 3 $\Rightarrow$

в ПЧ тоже 3 $\Rightarrow$ $abc+1 \vdots p; \not\vdots p^2$

Докажем что

$(a+1)(b+1)(c+1)+3 \vdots p$

$(a+1)(b+1)(c+1)+3 = abc+ab+ac+bc+a+b+c+4$

$=(abc+1)+(ab+a+1)+(ac+c+1)+(bc+b+1) \vdots p$

$(a+1)(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} -3$

Заметим т.к. каждая скобка $\vdots p$

$ab+a+1 \underset{p}{\equiv} 0 \qquad a(b+1) \underset{p}{\equiv} -1$

$bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow b(c+1) \underset{p}{\equiv} -1$

$ac+c+1 \underset{p}{\equiv} 0 \qquad c(a+1) \underset{p}{\equiv} -1$

$\Downarrow$

$abc(b+1)(c+1)(a+1) \underset{p}{\equiv} (-1)(-1)(-1) \underset{p}{\equiv} -1$

т.к. $abc+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow abc \underset{p}{\equiv} -1$

$-1\cdot(a+1)(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} -1$

$-3 \underset{p}{\equiv} (a+1)(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} 1$

$1 \underset{p}{\equiv} -3 \Rightarrow 4 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow p=2$ т.к. p простое

Задача № 7 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Мизюкиных Мирон

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Поймем что $p=2$ быть не может.

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=4(abc+1)$

$ab^2c+a^2bc+abc^2+3abc+a+b+c+1+\ldots=4(abc+1)$

$ab^2c \geq abc$, $a^2bc \geq abc$, $abc^2 \geq abc$, $\underbrace{a+b+c}_{\geq 3}$ т.к. числа $\mathbb{N}$

V/

~~3abc+4 >~~

$4(abc+1) \geq ab^2c+a^2bc+abc^2+3abc+a+b+c+1 \geq 6abc+4$

≥

$\Downarrow$

$6abc+4 \leq 4abc+4$

$2abc \leq 0$ ↯.

т.к. числа $\mathbb{N}$.

$\Downarrow$

таких p нет. Ответ: нет.

114 - это правая часть в равенстве } которое написано во 2 строке в 1 листе
114 - это левая часть в равенстве