Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 49 7Аш

+ ЭМ

N1 Ответ: 4

Пример: 45 = 22+23 – 2-хорошее $n=45$
45 = 14+15+16 – 3-хорошее
45 = 7+8+9+10+11 – 5-хорошее
45 = 5+6+7+8+9+10 – 6-хорошее

Оценка к больше 1 и меньше 7 это 2, 3, 4, 5, 6

Заметим что среди к подряд идущих чисел есть все остатки по mod k
=> ~~...~~ если n представимо в виде суммы к подряд идущих чисел можно узнать с чем сравнимо n по mod k:

Если n – 2-хорошее, то $n \equiv 0+1 \pmod 2$ => n – нечётно
Если n – 4-хорошее, то $n \equiv 0+1+2+3 \pmod 4$ $\equiv 2$ => n – чётное
=>

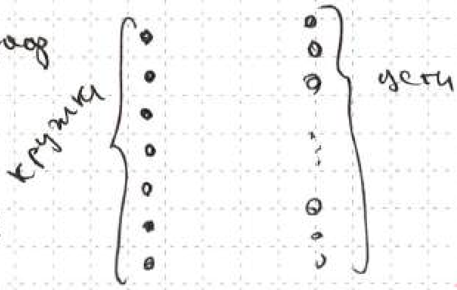
=> т.к. n не может быть одновременно и чётным и не чётным,
n ~~может быть ... 2-хорошим~~ не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим => max Кол-во пятёрок ~~...~~ $\leq 5-1=4$

=> ≤ 4 пример на 4 выше.

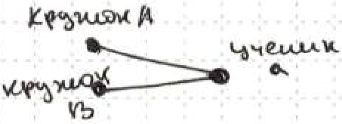
Все допустимые к
к = или 2 или 4

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 49

№2 Рассмотрим двудольный граф
если ребенок соединён с кружком $\Leftrightarrow$ он в него ходит



Посчитаем # вот таких элементов в графе



$\exists$ их P

С одной стороны для любой пары A и B $\exists$ ровно 3 ученика a

$$\Rightarrow P = \underbrace{\frac{7\cdot 6}{2}}_{\text{\# вариантов пар A и B}} \cdot \underbrace{3}_{\text{\# вариантов a для A и B}} = 63$$

С другой стороны каждый ученик класса посещает одинаковое # кружков ($\exists n$) и $\exists$ их k (учеников)

тогда ~~для~~ любой ученик (a) может участвовать в $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ~~кр~~ элементе

$$\Rightarrow P = \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}_{\text{\# возможных A и B для фикс. a}} \cdot \underbrace{k}_{\text{\# возможных a}}$$

$$\Rightarrow 63 = \frac{n(n-1)}{2}\cdot k \Rightarrow k \mid 63 \Rightarrow k \in \{7; 9; 21\}$$ (по усл. $6 < k < 60$)

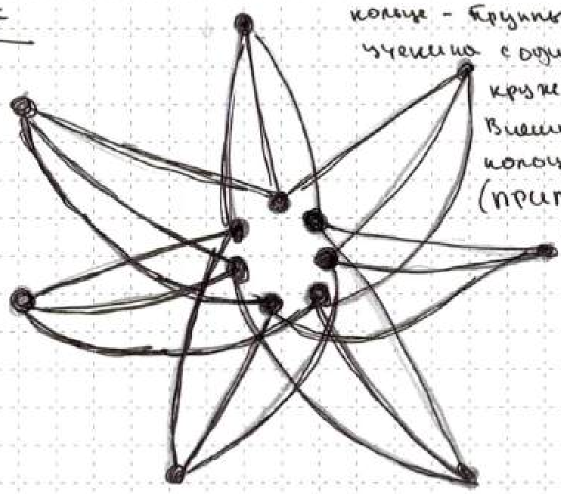
$\exists k = 7 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 9 \Rightarrow n\cdot(n-1) = 18$ $n \notin \mathbb{N}$?!

$\exists k = 9 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 7 \Rightarrow n(n-1) = 14$ $n \notin \mathbb{N}$?!

$\exists k = 21 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 3 \Rightarrow n(n-1) = 6$, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow n = 3$

$\Rightarrow$ Единственный вариант - 21 ученик

Ответ: 21



точки в центральном кольце - группы по 3 ученика с одинаковыми кружками
Внешнее кольцо - кружки
(пример зачем-то)

7В1
+

Задача №3 Лист 1 из 1 Номер участника: 49

№3 $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}$ Докажем, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{b+c+1+a}$ Это равносильно ⇒

$\Rightarrow (a-1)^2\cdot\cancel{(b+c+1)} + (a-1)^2 a \le \cancel{(b+c+1)\cdot(a-1)^2} + a\cdot(b+c+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 \le b+c+1 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-2a+1 \le b+c+1 \Leftrightarrow a^2-a \le a+b+c$ $\Leftrightarrow \cancel{b+c}-b^2-c^2 \le a+\cancel{b+c} \Leftrightarrow$

$[a^2+b^2+c^2 = a+b+c \Rightarrow a^2-a = b+c-b^2-c^2]$ $\Leftrightarrow 0 \le a+b^2+c^2$

верно т.к. числа неотрицательны

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$

Аналогично для остальных уробей ⇒

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{a+b+c+1} =$

$= \frac{a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+a+b+c+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1}$

Ещё раз доказательство:

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{b+c+1+a} \Leftrightarrow (a-1)^2\cdot(b+c+1) + (a-1)^2\cdot a \le (a-1)^2\cdot(b+c+1) + (b+c+1)\cdot a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 a \le (b+c+1)\cdot a \overset{a>0}{\Leftrightarrow} (a-1)^2 \le b+c+1 \Leftrightarrow a^2-2a+1 \le b+c+1 \Leftrightarrow$ (*)

$\Leftrightarrow a^2-a \le a+b+c$ $\Leftrightarrow b+c-b^2-c^2 \le a+b+c \Leftrightarrow 0 \le a+b^2+c^2$

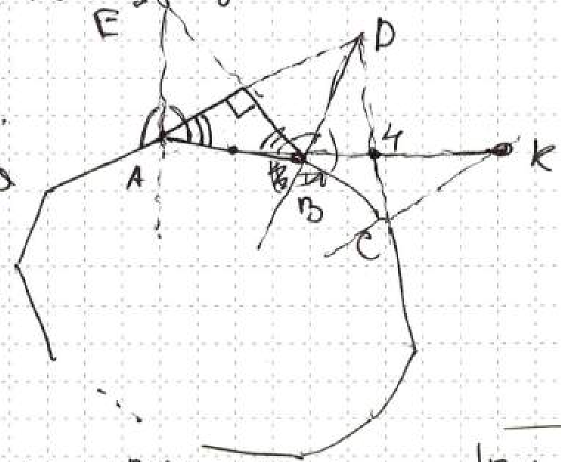
a^2-a (по усл) $= b+c-b^2-c^2$ Что верно из неотрицательности a.

(*) При $a=0$ верно сразу же (при прибавлении 0 ничего не меняется)

Задача № 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 49

№4 Пример для k = 1

- А правильный 500-угольник.
- построим прямоуг. р/б △ на его ребре как на гипотенузе во внеш. сторону.
- построим бисс. углов 500-уг. и продлим их за прямые.
- на пересечении полученных прямых и продлённых боковых сторон прямоуг. △ за вершину прямого угла отметим точки и получим первые звенья ломаной, последующие строим по алгоритму описанному.



По построенному ранее EB и AD — первые звенья ломаной, третьим будет DC, а четвертым ~~В~~ будет BK где BK ⊥ DC и K ∈ биссект. прямой содержащ. бисс. (∠C)

△ABD = △CBD ~~...~~ => AD = DC и ∠DCB = ∠DAB =>
=> △BCK – р/б => AD = EB = DC = BK

$\boxed{BA = BD = CK \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{замкнётся}}$

Оставшиеся звенья стр. также как и DC и KB.

Получаем искомую ломаную для K = 1

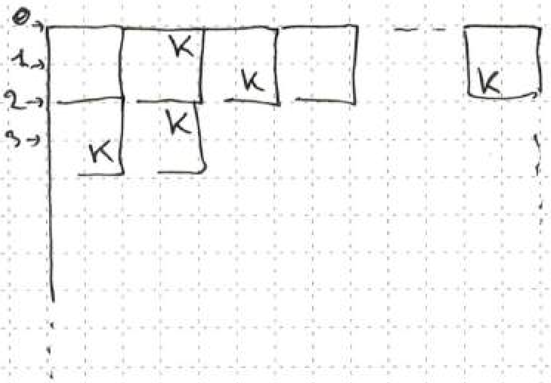
ТМ

Эка

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 49

№5 Разделим всё поле на квадратики 2×2. Заметим, что в каждом квадратике может находится максимум 1 король.

Всего квадратиков будет $15\cdot15 = 225$
Королей стоит 220
$\Rightarrow$ свободными будут ровно 5 квадратиков.

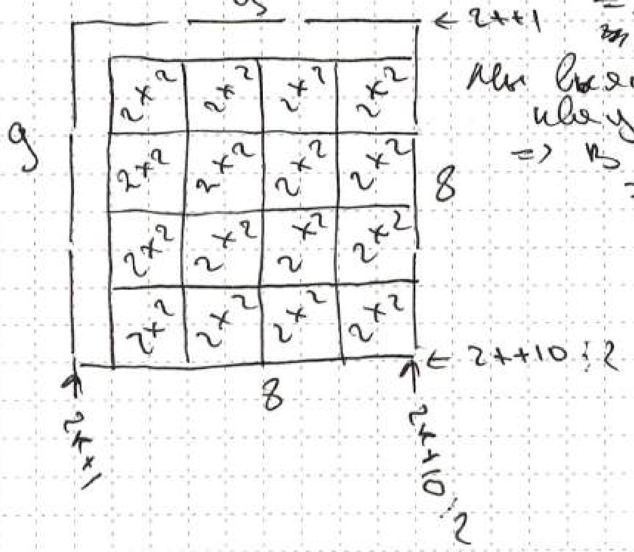


Δ произвольный квадрат 9×9

~~Напомним~~ После разделения всего поля на квадратики 2×2 ~~всех~~ одна из границ (верхней и нижней) квадрата 9×9 совпала с границей ряда квадратов 2×2

(Если пронумеровать линии сетки, то одна из верхней и нижней будет иметь четный номер
А значит здесь границы квадратов 2×2 совпадут с границей 9×9)
Аналогично и для правой и левой границы.

$\Rightarrow$ Внутри любого квадрата 9×9 будет квадрат 8×8 сост. только из целых квадратов 2×2



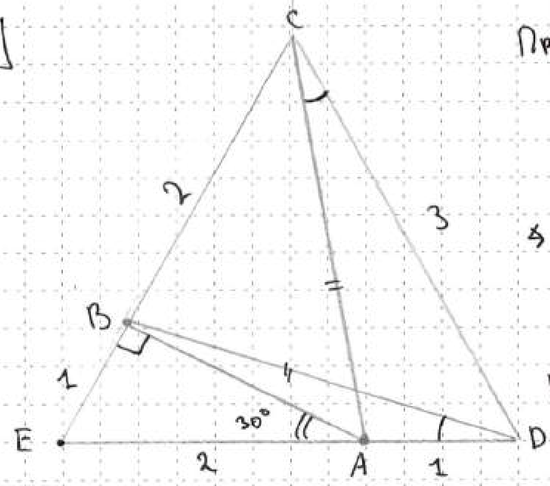
$\Rightarrow$ В любом квадрат 9×9 есть 16 целых квадратов 2×2
Мы выяснили, что во всех кроме 5 квадратах 2×2 стоят короли $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ в квадрате 9×9 королей $\geq 16-5=11$

$\square$

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 49

7 Ev

№6



Продлим AD за A, ∃ E ∈ [DA) и AE = 2

$\Rightarrow ED = 2+1 = 3 = CD$, $BD = AC$, $\angle ADB = \angle ACD$ $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BDE \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = AD = 1$

В $\triangle EBA$, в нем $EB = 1$, $EA = 2$, $\angle BAE = 30°$ $\Rightarrow \angle EBA = 90° \Rightarrow$ (?)

$\Rightarrow \angle BEA = 60°$ $\Rightarrow$

По доказ. выше равенст. $\triangle$

$\Rightarrow \angle ADC = \angle BED = 60°$

В $\triangle EDC$:

$\angle EDC = 60°$, $CD = 3 = ED$ $\Rightarrow \triangle EDC$ – р/с $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CED = 60°$, $\angle BED = 60°$ $\Rightarrow B \in EC$, $\triangle EDC$ – р/с $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = CD = EC = BC + BE = AD + BC = 1 + BC \Leftrightarrow BC = 2$

Ответ: 2

+. KA

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 49 7пм +см

№7 $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=A$

Пусть может $\Rightarrow \exists a,b,c,p: A=p^2\cdot(abc+1)$

Т.к. p-простое верно хотя бы одно из двух: какие-то 2 скобки $\vdots p$ (1)
какая-то 1 скобка $\vdots p^2$ (2)

Рассм (1) случай. Н.у.о $ab+a+1 \vdots p$ и $cb+b+1 \vdots p$

• $\Rightarrow$ $abc+ab+a \vdots p$, $ab+a+1 \vdots p$ $\Rightarrow abc-1 \vdots p \xRightarrow{\text{при } p>2} abc+1 \not\vdots p \Rightarrow V_p(A)=p^2=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ca+c+1 \not\vdots p$

• $ab+a+1 \vdots p \Rightarrow abc+ac+c \vdots p$, $abc-1 \vdots p$ $\Rightarrow ac+c+1 \vdots p$?!

$\Rightarrow$ Первый случай не возможен.

Заметим, что мы также доказали, что у никаких двух скобок нет общих делителей (иначе $abc+1 \not\vdots$ этому делителю $\Rightarrow A\neq p^2\cdot(abc+1)$)

$\Rightarrow$ Все скобки взаимопросты и только одна из них $\vdots p$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ две другие взаимопросты и нацело делят $abc+1$

$\Rightarrow$ Н.у.о $abc+1 \vdots (bc+b+1)(ca+c+1) = abc+1+X$, где $X>0$?!

$\Rightarrow$ Оба случая не возможны $\Rightarrow$ Ответ: Нет

Почему $p>2$ и др. моменты: Рассм a,b,c - все нечётны $\Leftarrow abc+1 \vdots 2$, но тогда все скобки в A - нечётны а значит $A \not\vdots abc+1$?!

$\Rightarrow abc+1$ - нечётно значит переход $abc-1 \vdots p \Rightarrow abc+1 \not\vdots p$ верен, т.к. для $p=2$ $abc+1 \not\vdots 2$ и $abc-1 \not\vdots 2$ $\Rightarrow$ это не возможно

Заметим, что если $abc+1$-нечётно то ≥ 1 из чисел $\vdots 2$
Н.у.о это $a \Rightarrow$ рассм $ca+c+1$: если $c \not\vdots 2$ то $ca+c+1 \vdots 2 \Rightarrow A \vdots 2$, $abc+1 \not\vdots 2$ $\Rightarrow p=2$

если $c \vdots 2$, то рассм $bc+b+1$: если $b \not\vdots 2$, то $bc+b+1 \vdots 2 \Rightarrow A \vdots 2$, $abc+1 \not\vdots 2$ $\Rightarrow p=2$

$\Rightarrow a,b,c \vdots 2 \Rightarrow a,b,c \geq 2 \Rightarrow abc-1 \in \mathbb{N}$

Ответ: Нет

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 49

0 $\overline{\text{KAб}}$

№8 ∄ 24 гири max. веса, их должен уравновесить набор из оставшихся (∃ можно)
т.к. все оставшиеся легче выбранных их должно быть ≥25

теперь ∄ 24 самые лёгкие ∃ их уравновесит ≤22 гири из оставшихся
$\Rightarrow M_{22ост} \geq M_{24min}$

Прибавим к обеим частям 25 и 26 по весу гирю

получим $\underbrace{M_{22ост} + M_{25} + M_{26}}_{\leq M_{24max}} \geq M_{26min}$

?! с тем, что мы выяснили в начале.

т.к. все из оставшихся тяжелее 24 выбранных ⇒ кол-во уравновешивающих <24 ⇒ оно ≤23

⇒ Все веса находятся в промежутке м/у M_{26min} и M_{24min} из 24 гирь

Возьмём $M_{23ост} = M_{24min}$ и будем добавлять по