Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 10
аудитория – посадочное место

41306293
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ ОЛ	+ КА	∓ ВБ	
7 АЮ	7 Ем	7 МС	2 АБ	23

№3

Лемма 0: (причем $y\neq 0$)

Если $0\le x\le y$ и $c\geq 0$, то верно следущее неравенство:

$$\frac{x}{y}\le\frac{x+c}{y+c}$$

Док-во:

$\frac{x}{y}\le\frac{x+c}{y+c}\Leftarrow xy+cx\le xy+cy\Leftarrow cx\le cy$

при $c=0$ это верно т.к. $0\le 0$, а иначе $cx\le cy\Leftarrow$
$\Leftarrow x\le y$, что верно

Лемма 0 доказана.

Докажем что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\le\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$

Во первых т.к $(a-1)^2\le b+c+1$ т.к $(a-1)^2\le a^2+b^2+c^2$ $\Leftarrow$
$\Leftarrow a^2-2a+1\le b+c+1\Leftarrow a^2-a\le a+b+c\Leftarrow a^2-a\le a^2+b^2+c^2\Leftarrow$
$-a\le b^2+c^2\Leftarrow 0\le a+b^2+c^2$ и это верно т.к. $a\geq 0$ и $b^2, c^2\geq 0$

Во вторых $0\le(a-1)^2$

В третьих $b+c+1\neq 0$ т.к. $b\geq 0$ и $c\geq 0\Rightarrow b+c+1\geq 1>0$

~~Надо в тот~~

Тогда применим Лемму 0 при $x=(a-1)^2$,
$y=b+c+1$, $c=a$, все условия соблюдены, тогда

см на сл стр

Верно следущее $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$

~~В~~ Аналогично получаем $\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \le \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}$ и

$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1}$.

Значит

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}+\frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}+\frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1},$$ что мы и хотели

№1

Ответ: 4 пятерки

Оценка:

Пусть он может получить хотя бы 5 пятерок. Тогда он получил ровно 5 пятерок. Тогда число n представимо в виде суммы 2х 4 последовательных натуральных чисел. Допустим $n = a + (a+1)$ и $n = b + (b+1) + (b+2) + (b+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 2a+1 \Rightarrow n \not\vdots 2$ и $n = 4b+6 \Rightarrow n \vdots 2$ — противоречие $\Rightarrow$ он мог получить не более четырех ~~четверок~~ пятерок

Пример:

$n = 75$

$n = 37 + 38$ — 2-хорошее

$n = 24 + 25 + 26$ — 3-хорошее

$n = 13 + 14 + 15 + 16 + 17$ — 5-хорошее

$n = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$ — 6-хорошее

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2

Пусть всего учеников n, и каждый ходит в k кружков. Тогда посчитаем кол-во посещений кружков (то есть кол-во пар ученик-кружок, что ученик посещает кружок). С одной стороны их nk т.к каждый из n учеников посещает k кружков. С другой стороны рассмотрим все пары кружков, их $C_7^2=21$, для каждой из этой пары есть 3 ученика, каждые из которых посещают оба этих кружка ~~говорить что ... = 6 посещений соответственно, посещения этими 3 учениками~~

Тогда мы просуммируем эти 6 посещений для каждой из пар кружков. Получим $21\cdot 6$ посещений, но каждое посещение мы посчитали

СМНАС1С+Р

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306293 — номер участника

лист 5 из 12

ровно $k-1$. т.к. мы его считали в парах которые имеют вид „", „этот кружок" и „другой кружок который посещает этот человек". Значит всего посещений

$$\frac{21\cdot 6}{k-1}.$$

Тогда $\frac{21\cdot 6}{k-1} = n\cdot k \Rightarrow 2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot k\cdot(k-1)$.

Заметим, что $1 \le k \le 7$. Тогда

При $k=1$: $2\cdot 3^2\cdot 7 \ne 0$ ✗

При $k=2$: $2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot 2 \Rightarrow n = 3^2\cdot 7 = 63 \ge 60$ ✗

При $k=3$: $2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot 6 \Rightarrow n = 3\cdot 7 = 21$ V

При $k=4$: $2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot 12$, но $2\cdot 3^2\cdot 7 \not\vdots 12$ ✗

При $k=5$: $2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot 20$, но $2\cdot 3^2\cdot 7 \not\vdots 20$ ✗

При $k=6$: $2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot 30$, но $2\cdot 3^2\cdot 7 \not\vdots 30$ ✗

При $k=7$: $2\cdot 3^2\cdot 7 = n\cdot 42 \Rightarrow n = 3 \le 6$ ✗

Тогда $n=21$ т.к. других вариантов n — нет, то в этом классе ровно 21 ученик.

Ответ: 21

Оценка верная, примера нет.

№4

Ответ: 250

~~Давайте предположим что все звенья имеют длину 1.~~

~~Оценка: Рассмотрим как мн-во S_1 такое что все звенья в S_1 есть хотя бы x элементов, все звенья в мн-ве S_1 между собой попарно параллельны и также не существует таких двух звеньев, что одно из них в S_1 другое не в S_1 и они параллельны, такое мн-во существует т.к. Мы можем взять Пусть $k \geq 251$~~

Пусть $k \geq 251$

Оценка: Рассмотрим какое-нибудь звено, назовем его A. Пусть мн-во S_1 это мн-во содержащее все звенья параллельные A (включая A и звенья лежащие с A на одной прямой) Так как $k \geq 251$, то есть звено

см на сл стр

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306293 — номер участника

лист 7 из 13

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

и не соседний с A. A и пересекающийся с A

которое перпендикулярно ~~отрезку~~ Назовем его B. По аналогии построим мн-во S_2 для этого звена (~~отрезка~~) (S_2 включает в себя ~~отрезок~~ B, звенья лежащие с B на одной прямой и все звенья параллельные B).

Во первых $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ т.к. A ⊬ B.

Предположим что $|S_1 \cup S_2| = 1000$, то есть каждое звено лежит либо в S_1 либо в S_2. ~~Тогда введем систему координат с центром в O = A∩B и базисными векторами $\vec{A}$, $\vec{B}$~~ Тогда введем декартову систему координат с центром в любой из вершин и осями параллельными A и B.* Тогда координаты всех вершин целые т.к.

*(A || оси x, B || оси y)

СМ НА С Л СТР

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Первый день, заключительный этап

8 — класс
41306293 — номер участника
лист 8 из 13

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

~~Пусть~~ Если координаты какой-то вершины целые то следующей вершины тоже (т.к. они отличаются на 1 либо по координате X либо по координате y), а у нас есть вершина с координатами (0,0), тогда следующая за ней (по ломаной в любую сторону) тоже целая и следующая за этой тоже целая и т.д. (вершина целая если у нее целые координаты). ~~Пусть есть так как K≥25 K и A есть отрезок K, что K∦B и A∩A≠∅ и K⊥A, что с одной стороны координ. расположены~~ а также A и K не соседние. ~~Тогда~~ Но тогда координата по X у концов отрезка B совпадает и лежит находится между координатами концов отрезка A (строго между) А координаты концов A ~~по оси~~ по X это последовательные числа — противоречие

СМНАКЛСТФ

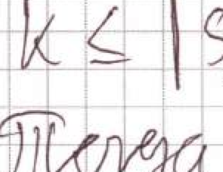
т.к. между целыми последовательными числами нет других целых чисел. Значит $|S_1 \cup S_2| \neq 1000 \Rightarrow |S_1 \cup S_2| < 1000 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ сущ. такой отрезок C, что $C \notin S_1$ и $C \notin S_2$. Построим мн-во S_3 в которое будут входить C, все звенья лежащие с C на одной прямой, все звенья параллельные C. Т.к. $k \geq 251$, то существует такой отрезок D, что $D \perp C$, $D \cap C \neq \emptyset$, D не соединит с C.
Построим мн-во S_4 которое включает в себя D, все звенья лежащие с D на одной прямой и все звенья параллельные D.
Заметим что S_1, S_2, S_3, S_4 - не пересекающиеся т.к. A, B, C, D попарно непараллельны.
Значит $|S_1|+|S_2|+|S_3|+|S_4| \leq 1000 \Rightarrow$
СМЧАСЛСТР

Какое-то из мн-в из S_1, S_2, S_3, S_4 имеет меньше 250 элементов. ~~Докажем~~ Без ограничения общности будем считать, что это S_1. Тогда мн-во звеньев которое пересекает О под прямым углом это подмножество S_1 и тогда $k \le |S_1| \Rightarrow 251 \le |S_1|$. ~~нет~~

Тогда с одной стороны во всех мн-вах S_1, S_2, S_3, S_4 хотя бы 251 элемент, а с другой в каком-то не более 250 — противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow k \le 250$

~~Пример:~~



~~Пусть есть квадрат ABCD со стороной 1. Отметим $A_1, \dots, A_{250}$ так что $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{249}A_{250} = A_{250}B$, причем $A, A_1, \dots, A_{250}, B$ лежат на одной прямой именно в таком порядке.~~

СМ НА СЛ СТР

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306293 — номер участника

лист 11 из 13

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Определим $B_1, \dots, B_{250}$, $C_1, \dots, C_{250}$, $D_1, \dots, D_{250}$ аналогично. Тогда лишней будут следующие

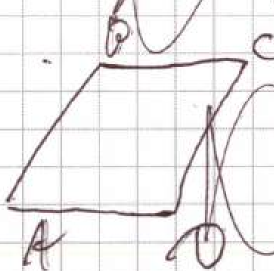
$A_1 - C_1,\ A_2 - C_2,\ A_3 - C_3, \dots A_{250} - C_{250}$

$B_1 - D_1,\ B_2 - D_2,\ B_3 - D_3, \dots B_{250} - D_{250}$

$A_1 - B_{250},\ A_2 - B_{249}, \dots A_{125} - B_{126}$

$B_1 - C_{250},\ B_2 - C_{249}, \dots$

Пример:



Рассмотрим ромб ABCD со стороной 1 (ромб не является квадратом). Отложим потом я нахожу с какими углами [illegible]. А нужно его выбирать Отложим на стороне AB точки

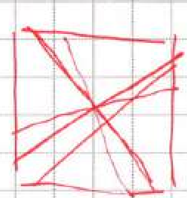
СМ и АС 1 С+Р.

Рассмотрим квадрат ABCD. Пусть $A_1, \dots A_{250}$ таковы, что $AA_1 = \dots = A_{280}B$.
$B_1, \dots B_{250}$, $C_1, \dots C_{250}$, $D_1, \dots D_{250}$ — аналогично.
Тогда $A_1, \dots A_{250}$, $B_1, \dots B_{250}$, $C_1 \dots C_{250}$, $D_1 \dots D_{250}$ — вершины.

Ребра:

$A_i - C_i$

$B_i - D_i$ для $\forall i$



?!

Это не замкнутая ломаная?

оценка есть, примера — нет

Номер участника 41306293

Класс 8

ФИО участника Морозкин Савва Сергеевич

Задача № 4

Вопрос ~~Изучили ребра звенья такие что~~ звенья такие что звено пересекает их под прямым углом. Обязаны ли звенья пересекаться с этим звеном

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ

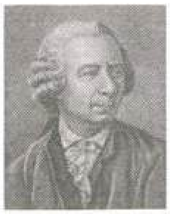
Каждое звено должно пересекать хотя бы k из оставшихся звеньев под прямым углом.

Задача №

Вопрос

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ



8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-4 - 2А
аудитория – посадочное место

41306293
номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5	6	7	8	Σ
v + АД	+ КН	0 КН	− КА	
7 ПР	7 МС	0 РХ	0 КЮ.	14

№5

Разобьем квадрат 30×30 на квадраты 2×2 (Рис. 1). Всего квадратов 2×2 будет 225. В каждом квадрате не могут находится больше одного короля т.к. иначе они будут бить друг друга.

Рис. 1.

Значит во всех квадратах 2×2 не более 1 короля. Значит ровно в пяти ~~кв~~ квадратах ~~нет~~ 2×2 королей нет. В каждом квадрате 9×9 есть ровно 16 квадратов 2×2 (тех, на которые мы разбили квадрат 30×30), ~~т.к.~~ т.к. клетки отмеченные $\times$ на рис.2 находятся в разных кв. и если кв. 2×2 содержит $\times$ то он находится в кв. 9×9. Среди этих 16 кв. 2×2 не более 5 пустых $\Rightarrow$ хотя бы в 11 есть король $\Rightarrow$ в кв. 9×9 есть хотя бы 11 королей, значит во всех кв. 9×9 есть хотя бы 11 королей

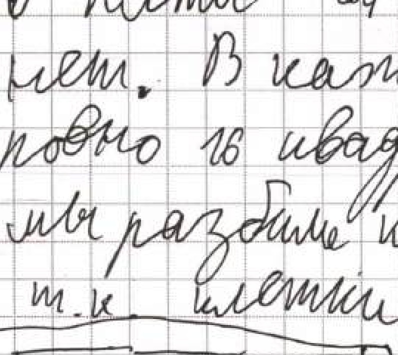
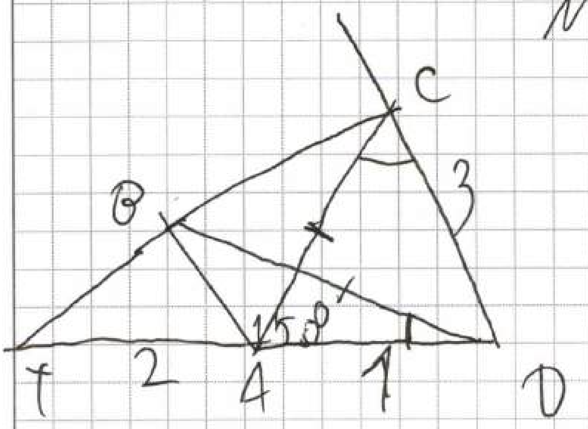


рис.2.

№6



Отметим точку T на прямой AD за точку A, что $AT=2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} AC &= BD \\ \angle ACD &= \angle BDT \\ CD &= DT \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ACD = \triangle BDT.$$ Тогда ~~BA~~ $BT=1$

$BT = AD = 1$. $\angle BAT = 180^\circ - \angle BAD = 30^\circ$.

$$\left.\begin{aligned} BT &= 1 \\ TA &= 2 \\ \angle BAT &= 30^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{\angle BAT=}\ \angle TBA = 90^\circ \text{ и } \angle BTA = 60^\circ.$$ Из

$\triangle ACD = \triangle BDT$ следует, что $\angle CDA = \angle DTB = 60^\circ$. Т.к. $CD = DT$ и $\angle CDT = 60^\circ \Rightarrow \triangle CDT$ − равносторонний $\Rightarrow$ ~~BT~~ $\angle CTD = 60^\circ$, но т.к. $\angle BTD = 60^\circ \Rightarrow T, B, C$ − одна прямая $\Rightarrow BC = CT - BT = 3 - 1 = 2$.

Ответ: $BC = 2$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 41306293

класс номер участника лист 3 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№8

~~Пусть наши~~ Обозначим наши гири ~~имеют~~ за веса $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ и без ограничения общности будем считать, что $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{50}$ ($a_i < a_j$ если a_i левее a_j). Назовем гири $a_1, \dots a_{25}$ — большими, а $a_{26}, \dots, a_{50}$ — маленькими. Тогда любая большая тяжелее ~~не~~ любой маленькой.

Пусть мн-во ~~S~~ $S = \{a_1, a_2, \dots a_{22}, a_{23}, a_{25}\}$. Пусть T это мн-во гирь которые весят суммарно столько же сколько и гири из S и $T \cap S = \varnothing$. $|T| \geq 26$ т.к. суммарный вес ~~...~~ гирь ~~...~~ $a_1, a_2, \dots, a_{24}$ больше

если это всё-таки читать, то тут что-то странное

чем суммарный вес гирь из S, но тогда мн-ву из гирь $a_1, \dots a_{24}$ нельзя будет сопоставить мн-во из оставшихся гирь с той же массой, т.к. ~~...~~ ~~...~~ суммарный вес $a_1 \dots a_{24}$ будет просто больше веса всех оставшихся гирь СМ Н АС1 СТР предыдущую страницу надо читать?

лучше пересмотреть

Значит $|T| \leq 25$. С другой стороны если $|T| \leq 24$, то если $a_{25} \notin T$, то в S - 24 больших, а в T - не более 24 маленьких, ну значит S тяжелее T, или $a_{25} \in T$, но тогда $a_1 > a_{25}$, а оставшиеся 23 больших из S тяжелее чем оставшиеся маленькие из T. Значит $|T| \geq 25 \Rightarrow$ $\Rightarrow |T| = 25$.

Рассмотрим следущие гири: та что находится ни в S и ни в T и та что самая тяжелая в T, обозначим их за ~~...~~ y и x соответственно.*

- оставшаяся

max T

$T \setminus \{x\}$

Пусть мн-во ~~R это~~ $R = T / x$. Тогда $|R| = 24$. Пусть мн-во Q это мн-во гирь совместно суммарный вес которых равен суммарному весу гирь из R и $Q \cap R = \varnothing$. Тогда рассмотрим следущие варианты

* либо x, либо y это ~~...~~ a_{24}

СМ НА СЛЕД СТР.

Пусть $M(P)$, где P-мн-во равняется суммарному весу гирь из P *

~~I $x \notin Q$ и $y \notin Q$:~~

~~Тогда $|Q \cap S| \geq 22$ т.к. иначе в Q есть хотя бы 24 больших и они суммарно тяжелее гирь из R. Тогда~~

~~$M(S) = M(T) = M(R) + m(x) = M(Q) + m(x) =$~~

~~$= M(S \cap Q) + 2m(x) + m(y)$~~

I $x \notin Q$ и $y \notin Q$:

Тогда $|Q \cap S| \leq 23$ т.к. иначе в Q будут 24 больших что и тяжелее чем в 24 меньших в R. Тогда

$M(S) = M(T) = M(R) + x = M(Q) + x \Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ есть хотя бы одна гиря~~

$\Rightarrow M(S / Q) = x$, если $|S/Q| = 1$, то тогда мы нашли равные гири, иначе у нас есть гиря с весом $m(a_{23})$ и она тяжелее x

Противоречие

а что, $Q \setminus S = \varnothing$? $\rightarrow$ если $x, y \notin Q$ - ..

1 о.к.

*а $m(z)$, где z — это гиря равняется весу гири z

СМ НАСЛ СТР.

III и IV случаев не бывает?

II $x \in Q$ и $y \notin Q$:
Тогда $|Q \cap S| \leq 22$ т.к. иначе в Q будет 24 больших х, что тяжелее 24 маленьких в R.
$M(S) = M(T) = M(R) + m(x) = M(Q) + m(x) =$
$= M(Q \cap S) + 2m(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow M(S/Q) = 2m(x)$.
Если в S/Q есть хотя бы две гири не a_{25}, то тогда они тяжелее $2m(x)$ и если же x это не a_{25}, то тоже $M(S/Q) > 2m(x)$.
Иначе $x = a_{24}$ и $M(S/Q) = \{a_1, a_{25}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 + a_{25} = 2a_{24}$

Пример:
$a = \frac{51}{24 \cdot 25 \cdot 2}$ и а гири имеют веса:
$a, a+1, \ldots, a+49$, тогда заметим
$(a) + \ldots + (a+25) = (a+26) + \ldots + (a+49)$. А другие представляются поочередным уменьшением каждого на ~~пред~~