РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия МУЛЯКОВ

Имя: МАКСИМ

Отчество: ИГОРЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Ульяновская обл.

4. Контактный телефон ______________________

5. Контактный электронный адрес max.mulyakov@gmail.com

12:08–12:10

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Муленов Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: 4

Оценка:

пусть n представлена всеми пятью способами, тогда:

$n = a + (a+1) = 2a + 1$ — n - нег

$n = c + (c+1) + (c+2) + (c+3) = 4c + 6$ n - чёт

противоречие

Пример:

$n = 75$ ~~при~~ каким нам представить

$75 = 37 \cdot 2 + 1 = 37 + (37+1)$

$75 = 24 \cdot 3 + 3 = 24 + (24+1) + (24+2)$

$75 = 13 \cdot 5 + 10 = 13 + (13+1) + (13+2) + (13+3) + (13+4)$

$75 = 10 \cdot 6 + 15 = 10 + (10+1) + (10+2) + (10+3) + (10+4) + (10+5)$

Ну и очевидно, что числа натуральные и последовательные.

Задача № 2 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Муляков Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

a – в сколько кружков ходит 1 ученик.

x_i – # учеников в i кружке.

X – # учеников в классе

Пусть каждый ученик платит 1 рубль кружку за право в нем находится.

Рассмотрим 1 кружок:

X_1 его ученики всего заплатили $X_1 a$, по условию ровно 3 из учеников 1 кружка – ученики 2ого, 3его ... 7ого.

Значит ученики 1ого кружка заплатили всего 3 рубля [illegible] 2ому, 3ему ... 7ому.

то есть ученики 1ого кружка заплатили ровно:

$X_1 a - 18$ рублей 1ому кружку, что равно $X_1 \cdot 1$

$X_1 a - 18 = X_1$ $X_1 a - X_1 = 18$ $X_1(a-1) = 18$	проведя такие же рассуждения для 2ого кружка мы получим: $X_2(a-1) = 18 \Rightarrow a-1 \neq 0$ т.к. $X_2(a-1) \neq 0$

$X_1(a-1) \overset{\text{значит}}{=} X_2(a-1)$

$\Downarrow$ т.к. $a-1 \neq 0$

$X_1 = X_2$ точно также дальше: $X_1 = X_3$ ... $X_1 = X_7$)

получим:

$X_1 = X_2$ ... $X_6 = X_7 = Y$

ученики заплатили в сумме Xa

и кружки получили: $7Y \cdot 1$

$Xa = 7Y$, заметим, что $a < 7$, иначе каждый ученик входит во все 7 кружков, и у нас будет 7 кружков по X человек – $X = 3$ по усл (общие часть у любых кружков по X по усл ? 6 противоречие

Задача № 2 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Муленов Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~докажем, что $a \geq 4$.~~

~~Za утв: существует кружок A, в котором ≤ 8 учеников.~~

докажем, что $a \geq 3$, предположим, что $a \leq 2$,

~~тогда в каждом пересе~~

тогда рассмотрев все пересечения кружков иначе не встретится второй раз (иначе входит ≥ 3 кружка)

значит # людей $\geq \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 7 \cdot 3 \cdot 3 = 7 \cdot 9 = 63$ (по числам)

$60 > \#$ людей ≥ 63 противоречие с усл.

$7y = xa$, заметим, $a < 7$ ранее док. и $a \neq 0$

$x \vdots 7$ (!!)

кандидаты на ответ: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56.

~~заметим, что # людей $\geq 7y - \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3$ т.к. в пересечениях мы либо посчитали 1 раз, либо если пересекались ≥ 3 - то 0 и меньше раз.~~

~~Это потому что $\frac{n(n-1)}{2} \geq n$ начиная с $n = 3$ т.к. $n - 1 \geq 2$.~~

~~пусть $x = 35 \Rightarrow 7y = a \cdot 35 \Rightarrow y = 5a \geq 15$~~

~~$35 \geq 7y - 63 \geq 105 - 63 = 42$ противоречие~~

~~пусть $x \geq 42 \Rightarrow 7y \geq a \cdot 42 \Rightarrow y \geq 6a \geq 18$~~

~~$60 > x \geq 7y - 63 \geq 126 - 63 = 63$~~

~~противоречие~~

~~кандидаты: 7, 14, 21, 28.~~

[illegible]

~~пусть $x \geq 28 \Rightarrow 7y \geq a \cdot 28 \Rightarrow y \geq 4a \geq 12$~~

~~пусть $a \geq 4$ тогда~~

Задача № 2 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Мулеков Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

ранее док.:

$x_1(a-1)=18$, где $x_1=y$

$y(a-1)=18$

а y - # рублей надлежащих каждым из друзьям (тоже самое как и # людей в них)

всего отдано ax рублей всем поровну (друзьям)

поэтому $y=\frac{ax}{7}$

$\frac{ax}{7}(a-1)=18$

$ax(a-1)=126$, заметим, что $a\geq 3$ (ранее док.)

$\vee\!\vert$

$6x$

$126\geq 6x$

$21\geq x$, кандидаты: 7, 14, 21.

пусть $x=7$, тогда

$a(a-1)=18$

$a\geq 5$ т.к. $4\cdot 3<18$,

но $5\cdot 4>20$ значит $x\neq 7$

пусть $x=14$

$2a(a-1)=18$

$a(a-1)=9$

$a\geq 4$ т.к. $3\cdot 2<9$,

но $4\cdot 3>9$ и да, a - натуральное число.

значит $x\neq 14$

единственный кандидат на ответ $x=21$

проверим,

$3a(a-1)=18$

$a(a-1)=6$, при $a=3$ это верно.

по условию явно сказано, что так могло быть, так что пример не нужен.

Ответ: в классе 21 ученик.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Мерленов Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

дано: $a+b+c=a^2+b^2+c^2$

(!) $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$

заменим $b+c$ на $a^2+b^2+c^2-a$ и $c+a$, и $a+b$ так же. т.к. дано были

(!) $\frac{(a-1)^2}{a^2+b^2+c^2+1-a}+\frac{(b-1)^2}{a^2+b^2+c^2+1-b}+\frac{(c-1)^2}{a^2+b^2+c^2+1-c}\le\frac{3}{1+a+b+c}$

* докажем, что $(a-1)^2\le a^2+b^2+c^2+1-a$

пусть $(a-1)^2>a^2+b^2+c^2+1-a$

тогда $a^2-2a+1>a^2+b^2+c^2+1-a$ переписали в неотриц.

$0>b^2+c^2+a$ очев. противоречие

докажем, что если $y\ge x$, то (при не неотриц. и $y\ne0$ и $y\ne f$)

$y>f$?

$\frac{x-f}{y-f}\le\frac{x}{y}$

$xy-fy\le xy-fx$

$-fy\le fx$

$fy\ge fx$

$y\ge x$ — дано

значит:

$\frac{(a-1)^2}{a^2+b^2+c^2+1-a}=\frac{a^2+1-2a}{a^2+b^2+c^2+1-a}\le\frac{a^2+1-a}{a^2+b^2+c^2+1}$

~~оцениваем~~ оставшиеся дроби также.

$f=a$, $x=a^2+1-a$ — неотриц. т.к. a меньше и a^2+1-2a — неотриц.

$y=a^2+b^2+c^2+1$

$a^2+b^2+c^2+1-a\ge(a-1)^2$ и

очев. $a^2+b^2+c^2+1\ne a$ т.к. $a^2+b^2+c^2=a+b+c+1$ что $>a$

а, да мы доказали что $y-f\ge x-f\Rightarrow y\ge x$.

(!) $\frac{a^2+1-a}{a^2+b^2+c^2+1}+\frac{b^2+1-b}{a^2+b^2+c^2+1}+\frac{c^2+1-c}{a^2+b^2+c^2+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$ $\boxed{\text{из *}}$

(!) $\frac{a^2+b^2+c^2+3-a-b-c}{a^2+b^2+c^2+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$ заменим $a+b+c$ на $a^2+b^2+c^2$ (дано по усл)

$\frac{3+a-a+b-b+c-c}{1+a+bc}=\frac{3}{1+a+b+c}$

доказали

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия МУЛЯКОВ

Имя: МАКСИМ

Отчество: ИГОРЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Ульяновская обл.

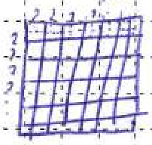
11:28–11:29

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Мулеков Максим

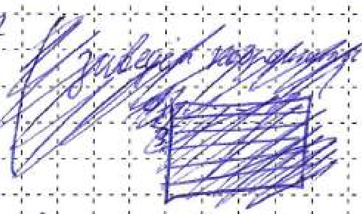
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

давайте разделим данный нам квадрат 30×30 на 225 квадратов 2×2

квадрат B

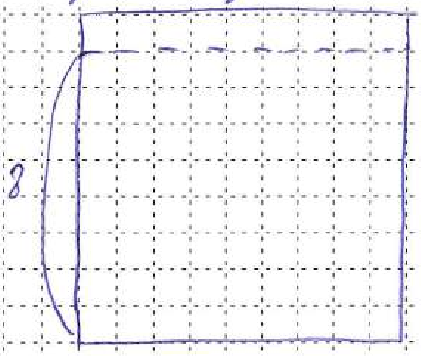


~~заведём координаты~~



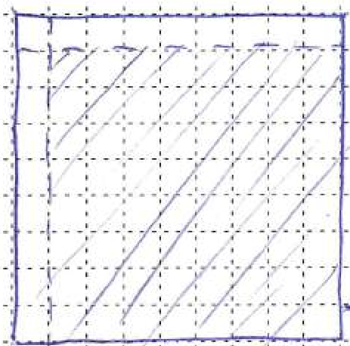
пусть существует квадрат 9×9 (квадрат A), в котором ≤10 королей

рассмотрим этот квадрат:



заметим, что всегда ровно 2 стороны совпадают с границами квадратов 2×2 (в силу нечётности стороны) из-за того, что пусть сверху граница квадратов проходит так: тогда заметим, что ~~оставшиеся~~ осталось стороны чётной длины, значит снизу граница квадратов совпадает с границей кв. 9×9. точно также не рассуждение проходит с боковыми границами

БОО получилось так:



заметим, что выделенный кв. C (квадрат C) тем стороной и его границы совпадают с границами кв. 2×2, значит в нём ровно $\frac{8}{2}\cdot\frac{8}{2}$ кв. 2×2 $= 16$.

рассмотрим B без A, утв: там присутствуют клетки ≤ 225−16 квадратов 2×2, то есть ≤ $\boxed{209}$ (потому что в C содержится целиком 16 кв. 2×2 и C содержится в A. p.s. будем считать, что кв. 2×2 присутствует в B без A, если есть хоть бы 1 клетка этого кв. в B без A)

Т.к. в A ≤ 10 королей, а всего их 220, значит в B без A их ≥ $\boxed{210}$.

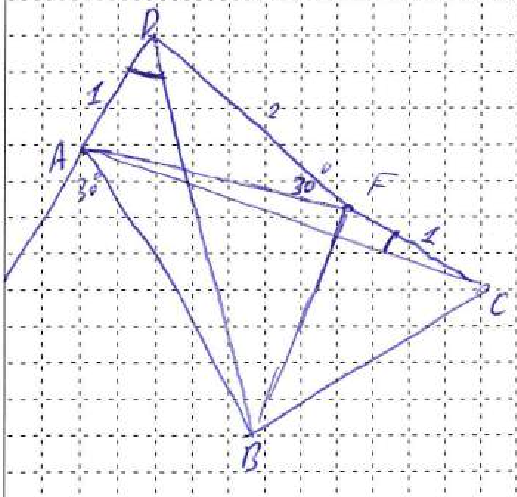
Т.к. квадратов 2×2 в B без A строго меньше чем королей (королей ≥ 210, квадратов ≤ 209)

в каком-то кв 2×2 ≥ 2 короля, но заметим, что уже 1 король бьёт все клетки своего квадрата 2×2, значит 2 короля бьют друг друга, противоречие с условием.

значит не существует кв 9×9, где ≤ 10 королей, значит в кв. 9×9 ≥ 11 королей.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Муленов Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



$AC=BD$

$CD=3$

$AD=1$

$\angle BAD=150^\circ$

$BC=?$

Отметим точку F на DC так, чтобы $CF=1$, тогда $DF=2$.

Т.к. $AC=DB$, $\angle ACF=\angle ADB$; $CF=AD$

$\triangle ADB=\triangle FCA$

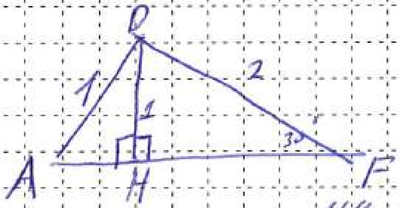
$\angle AFD=30^\circ$

$AF=AB$

Докажем, что $\angle DAF=90^\circ$: опустим высоту из D на AF в точку H

Т.к. $\angle DFH=30^\circ$ и $DF=2$

$DH=2\cdot\frac{1}{2}=1$



если H не совпала с A, то мы получили равнобедренный $\triangle$ с углом 90° при основании, чего не могло быть т.к. сумма углов будет $>180^\circ$ (если $\angle ADH\neq 0$).

а если A совп. с H, то $\angle DAF=90^\circ$.

$\angle BAF=180^\circ-30^\circ-\angle DAF=60^\circ$ и т.к. $AB=AF$

$\triangle BAF$ - равносторонний

$\angle AFB=60^\circ$ $\quad \angle BFC=180^\circ-\angle AFB-30^\circ=90^\circ$

$BF=AF$ и $FC=AD=1$

$\triangle DAF=\triangle CFB \Rightarrow BC=DF=2$

Ответ: $BC=2$.

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Мулелов Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

пусть могло, тогда: решаем в натур.

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(abc+1)p^2$

пусть какая-то из скобок $\vdots p^2$, БОО $ab+a+1$; заметим, что $(bc+b+1)(ca+c+1)>abc+1$

а т.к. $ab+a+1 \overset{\text{дел}}{\vdots} p^2$, то $ab+a+1 \geq p^2$ т.к. $ab+a+1>0$.

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)>(abc+1)p^2$ противоречие

значит будет ≥ 2 скобки $\vdots p$ БОО:

$\left.\begin{matrix} ab+a+1 \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{matrix}\right| \Rightarrow ab+a-bc-b \vdots p$

$* \left.\begin{matrix} abc+ac+c \vdots p \\ abc+ab+a \vdots p \end{matrix}\right| \Rightarrow ab+a-ac-c \vdots p$

$ab+a \underset{p}{\equiv} bc+b \underset{p}{\equiv} ac+c$ и т.к. $ab+a+1 \vdots p$ $\underset{p}{\equiv} -1$

но, получается, что $ac+c+1 \vdots p \Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^3$

$(abc+1) \vdots p$

$abc \underset{p}{\equiv} -1$

$ac+c \underset{p}{\equiv} -1$

$abc+ac+c \underset{p}{\equiv} 0$ см $*$

$-2 \underset{p}{\equiv} 0$

$-2 \vdots p$

$2 \vdots p \Rightarrow \boxed{p=2}$

Перечитаем условие

Задача № 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Мухенов Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(abc+1)\cdot 4$

заметим, что

$ab\cdot 1\cdot c+a\cdot bc\cdot 1+1\cdot b\cdot ca+a\cdot b\cdot c=4abc$

$a\cdot 1\cdot 1+1\cdot b\cdot 1+1\cdot 1\cdot c+ab\cdot bc\cdot ac+ab\cdot 1\cdot 1\geq 5$ т.к. в натур.

таким не хитрым способом можно заметить

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)\geq 4abc+5$, то есть

$4abc+4\geq 4abc+5$, противоречие.

значит такого не могло быть,

значит ~~это произведение~~ частное не могло быть кв. целого числа

Ответ: нет, не может.

Задача № 8 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Мулеков Максим

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Мысль: смотреть на крайние объекты, к примеру на 24 самых тяжёлых а потом и на 24 самых лёгких гирь.

Идея: делать маленькие сдвиги, с крайних объектов уменьшать/увеличивать на очень мало и смотреть какие именно гири вновь равны им.
(путём замены самой лёгкой/тяжёлой на более лёгкую/тяж.)