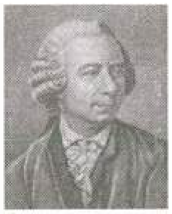
Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [ ] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [ ] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [ ] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5. 6. - 1Б
аудитория – посадочное место

41306257
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ МГ	+ И.Б.	Ø МК	
7 АЮ	7 Ем.	7 Пк	Ø АБ	21

№1.

Оценка: Допустим возможно получить 5 оценок "5": тогда n 2 - хорошее, 3 - хорошее, 4, 5, 6 - хорошее $\Rightarrow$ n представимо в виде суммы 2 последовательных чисел: $n = k + (k+1) = 2k + 1 \Rightarrow$ n - нечетно, также n представимо в виде 4 последовательных чисел $q, q+1, q+2, q+3$:

$n = q + (q+1) + (q+2) + (q+3) = 4q + 6 \Rightarrow$ n - четно $\Rightarrow$

n и четно и нечетно - противоречие.

Пример: На 4 оценки "5":

$n = 45$:

2 - хорошее: $n = 22 + 23$

3 - хорошее: $n = 14 + 15 + 16$

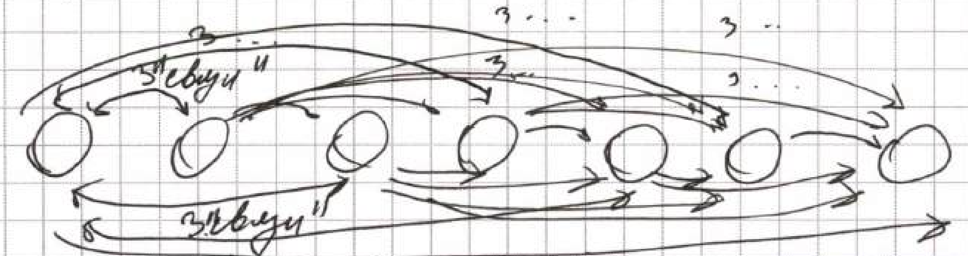
5 - хорошее: $n = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$

6 - хорошее: $n = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.

Ответ: 4.

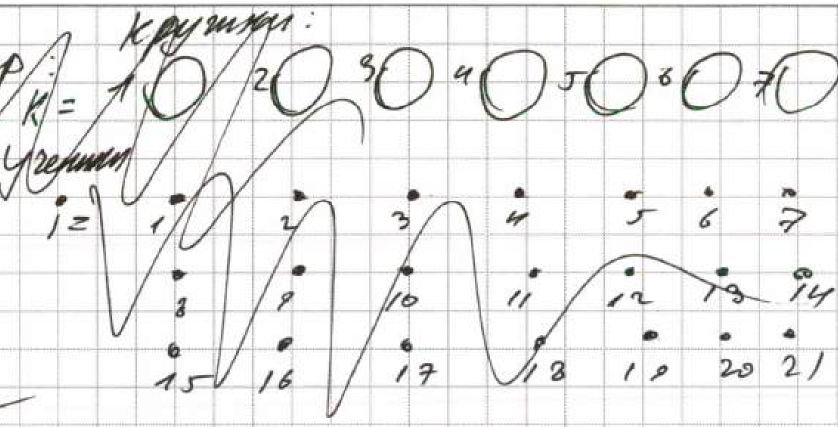
№2.

t кружков посещает каждый ученик, $t \in [0; 7]$, учеников в классе x.
Если какой-то ученик посещает какие-то 2 кружка, то назовём эту ситуацию "связью" ~~кружков~~ этих двух ~~двух~~ кружков.
По условию т.к. любые 2 кружка ровно 3 ученика посещают их оба, то "связей" кружков ровно: $\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 63$



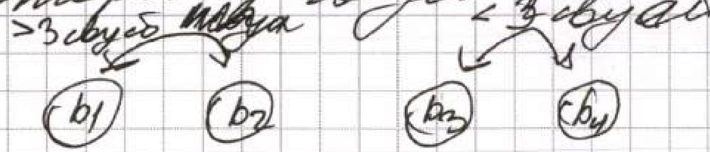
если $t=0$: противоречие т.к. никто не посещает кружки
если $t=1$: противоречие т.к. никто не посещает сразу 2 кружка
если $t=2$: кружок 1, кружок 2, ученик то каждый из x учеников создаёт ровно 1 "связь" $\Rightarrow$
$x \cdot 1 = 63 \Rightarrow x = 63 > 60$ — противоречие
$t=3$: кружок 1, кружок 2, кружок 3, ученик $\Rightarrow$ каждый из x учеников создаёт ровно 3 связи $\Rightarrow x \cdot 3 = 63$

=> $x = 21$ Пример:



Объяснение примера:

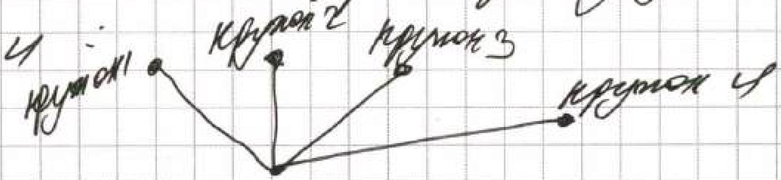
допустим примера на $x = 21$ нету => построим произвольный пример где каждый из 21 учеников посещает 3 кружка, т.к. каждый из 21 ученика создает 3 связи то связей — 63 => ~~т.к.~~ Алгоритм: пример не существует то найдутся 2 кружка, у которых связей больше 3, и найдутся 2 кружка, у которых связей меньше 3:



=> кружков у b_1 и b_1 > 3 "связей", у b_3 и b_4 < 3 "связей" тогда b_2 может равняться b_3 => Рассмотрим ученика который посещает b_1 и b_2, пусть теперь он будет посещать вместо b_1 и b_2 — b_3 и b_4. Повторим алгоритм. Теперь у b_1 и b_2 "связей" на 1 меньше, а у b_3 и b_4 на 1 больше.

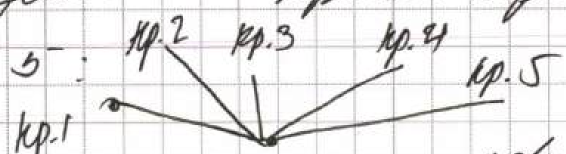
Повторим Алгоритм, пока у всех кружков не станет по 3 связи, Алгоритм закончится т.к. ~~[illegible]~~ если у кружков "связей" > 3 то он уменьшает это число, а если < 3 связей то увеличивает, и все остальные "связи" не меняются. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ пример существует.

если $t = 4$:



то каждый из x учеников создает ровно 6 "связей" $\Rightarrow$ $X \cdot 6 = 63 \Rightarrow X = \frac{63}{6} = 10{,}5$ — не целое — противоречие.

$t = 5$:



$\Rightarrow$ каждый из x учеников создает ровно 10 "связей" $\Rightarrow$ $x \cdot 10 = 63 \Rightarrow X = 6{,}3$ — не целое

$t = 6$: аналогично рассуждениям $t = 5$ $\Rightarrow$ каждый ученик создает ровно 15 связей $\Rightarrow X \cdot 15 = 63$ $X = \frac{21}{5} = 4{,}2$ — не целое.

$t = 7 \Rightarrow$ каждый создает по 21 связи $\Rightarrow$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306257 — номер участника

лист 5 из 7

$x \cdot 21 = 63 \Rightarrow x = 3 < 6$ — противоречие.

$\Rightarrow$ Ответ: 21 ученик.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}= \{a+b+c=a^2+b^2+c^2\}$$

$$=\frac{(a-1)^2}{a^2+b^2+c^2-(a-1)}+\frac{(b-1)^2}{a^2+b^2+c^2-(b-1)}+\frac{(c-1)^2}{a^2+b^2+c^2-(c-1)}$$

$=$

№3.

$$a^2-a=b+c-b^2-c^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2-2a+1}{b+c+1}=\frac{b+c-(b^2+c^2)-a+1}{b+c+1}=$$

$$=1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$$

аналог. $\frac{(b-1)^2}{c+a+1}=1-\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}$

и $\frac{(c-1)^2}{a+b+1}=1-\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}$

$$\Rightarrow \text{док}: 3-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}-\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}-\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}$$

$$\leq \frac{3}{1+a+b+c}$$

$$\Rightarrow 3-\left(\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}+\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}\right)$$

$$\leq 3-\left(\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1+a}+\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1+c}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1+b}\right)$$

т.к. $a, b, c \geq 0$ $\Rightarrow$ увеличили или не уменьшили ~~увеличили~~ (т.к. $a,b,c \geq 0$) у $3^{\text{ех}}$ слагаемых знаменатели

$\Rightarrow$ их сумма стала меньше или равна $\Rightarrow$ $3-$(их сумма) $-$ стало больше или равна.

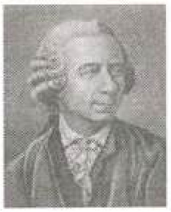
$$\Rightarrow 3-\left(\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}+\frac{a^2+b+c}{a+b+1}+\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}\right) \leq$$

$$\leq 3-\frac{2b^2+2c^2+2a^2+a+b+c}{a+c+1+b}=$$

$$=3-\frac{3a+3b+3c}{1+a+b+c}=$$

$$=\frac{3+3a+3b+3c-3a-3b-3c}{1+a+b+c}=$$

$$=\frac{3}{1+a+b+c} \Rightarrow \text{доказано}$$



Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

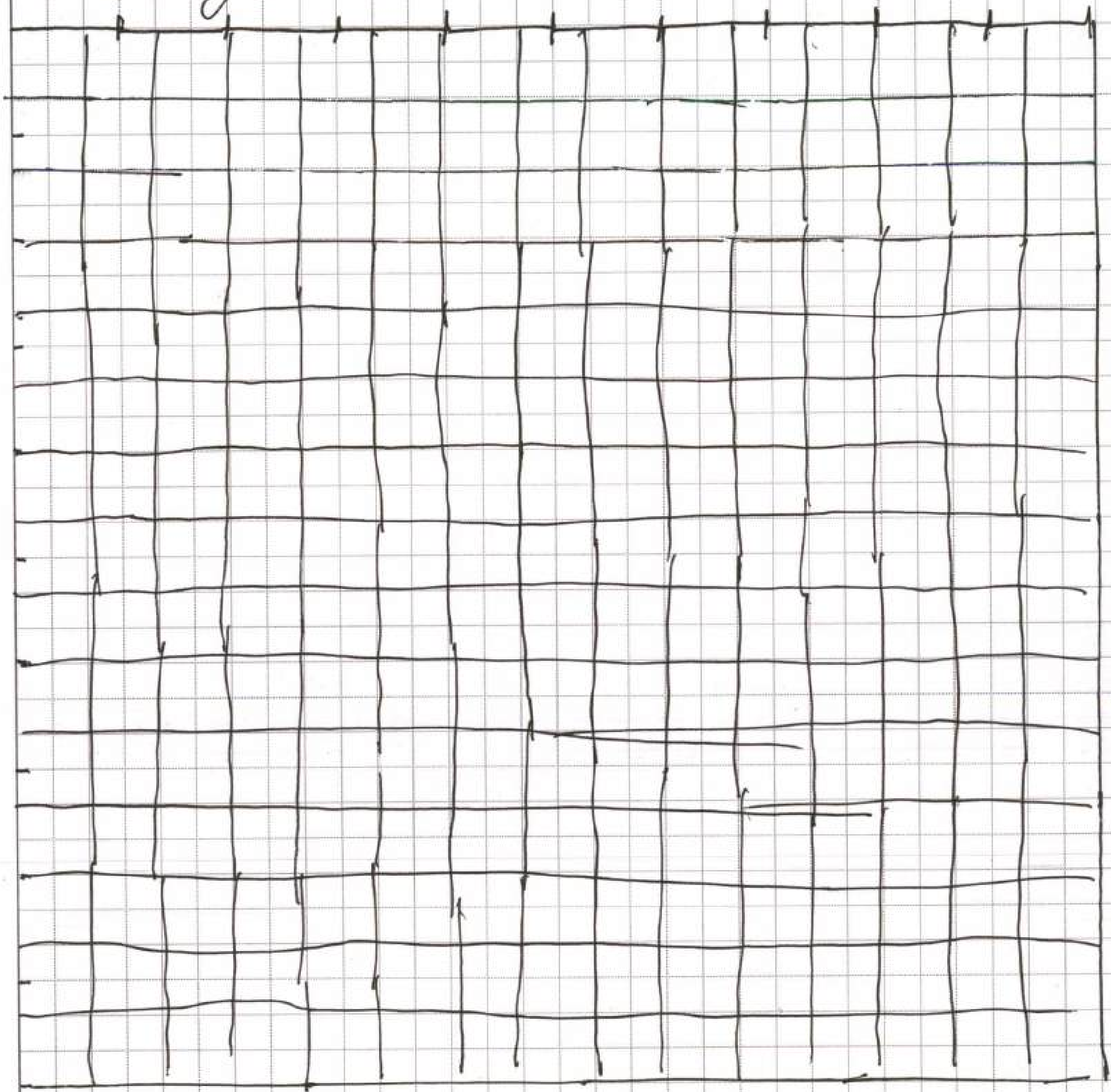
5. 6. - 15.
аудитория – посадочное место

41306257
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ пр	+ МС	-· ЕХ	– МК	
7 ЧД ✓	7 РХ	1 РХ	0 КА	15

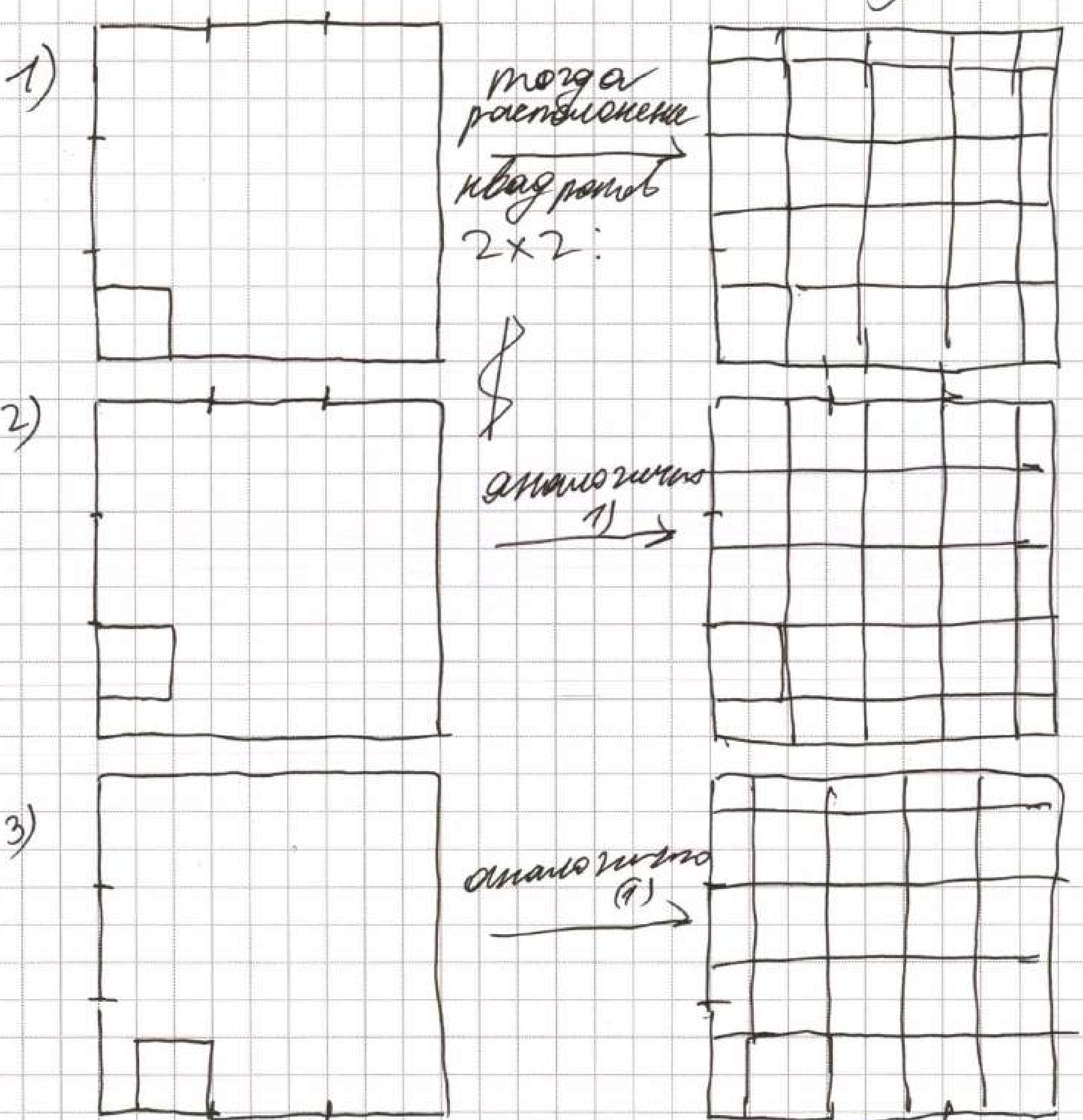
№1.

Разделим доску 30×30 на квадраты 2×2 данным способом:

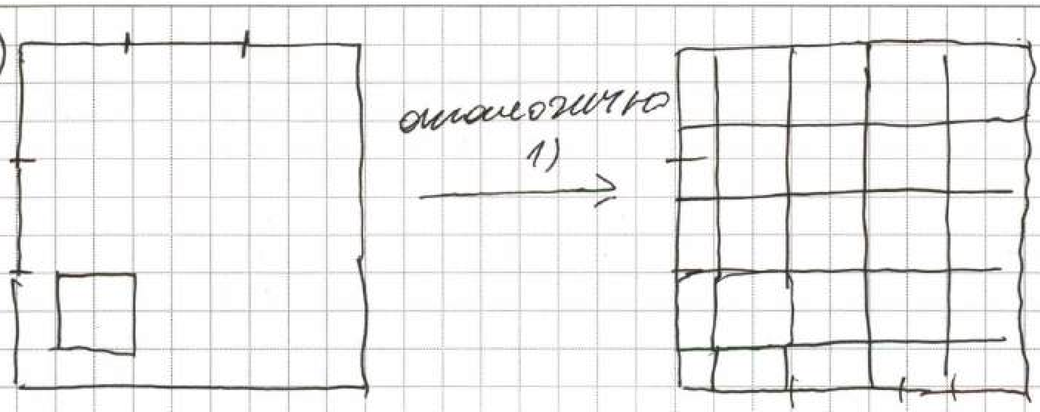


получилось $\frac{900}{4} = 225$ квадратов 2×2
в каждом таком квадрате 2×2
не более одного короля, а всего королей
220, а квадратов 2×2 225 => есть ровно
5 квадратов 2×2, в которых нет коро-

лей, покажем, что любой квадрат 9×9 содержит хотя-бы 16 квадратов 2×2: Рассмотрим самый нижний самый левый квадрат 2×2 который полностью содержит данный квадрат 9×9 => 4 случая расположения этого самого нижнего самого левого квадрата 2×2:



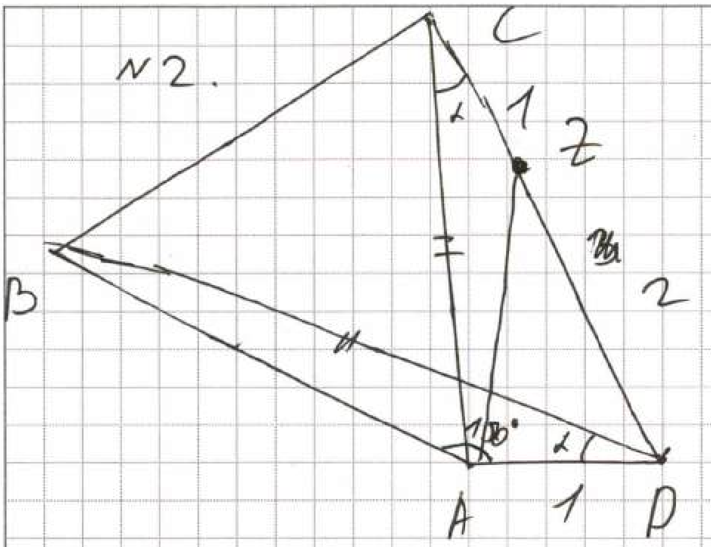
4)



$\Rightarrow$ в любом квадрате 9×9 есть хотя-бы 16 квадратов 2×2 и всего на доске только в 5 квадратах 2×2 нет королей.

$\Rightarrow$ В квадрате 9×9 есть 16 квадратов 2×2 и максимум в 5 из них нет королей $\Rightarrow$ min королей в данном квадрате 9×9: $16-5=11$ $\Rightarrow$ в любом квадрате 9×9 не менее 11 королей.

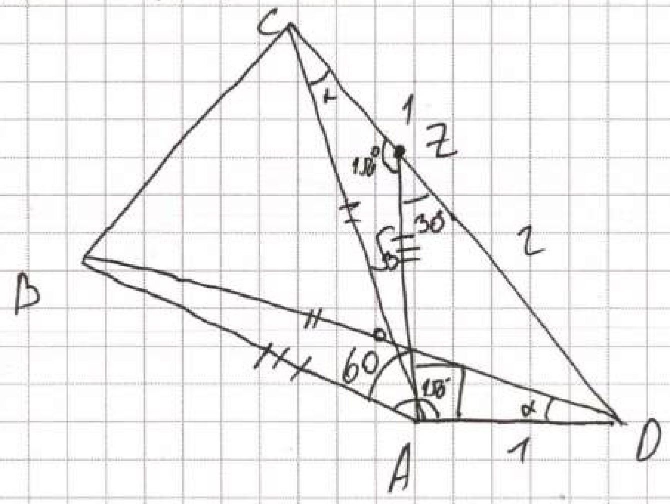
№2.



$\angle ADB = \angle ACD = \alpha$,

$Z \in CD$ такое, что $CZ = 1 \Rightarrow$

проведем $AZ \Rightarrow$



$\Rightarrow \triangle BDA = \triangle ACZ$ по СУС: $BD = CA$, $\angle ACD = \angle BDA$, $AD = CZ = 1 \Rightarrow BA = CZ$ и $\angle CZA = \angle BAD = 150°$

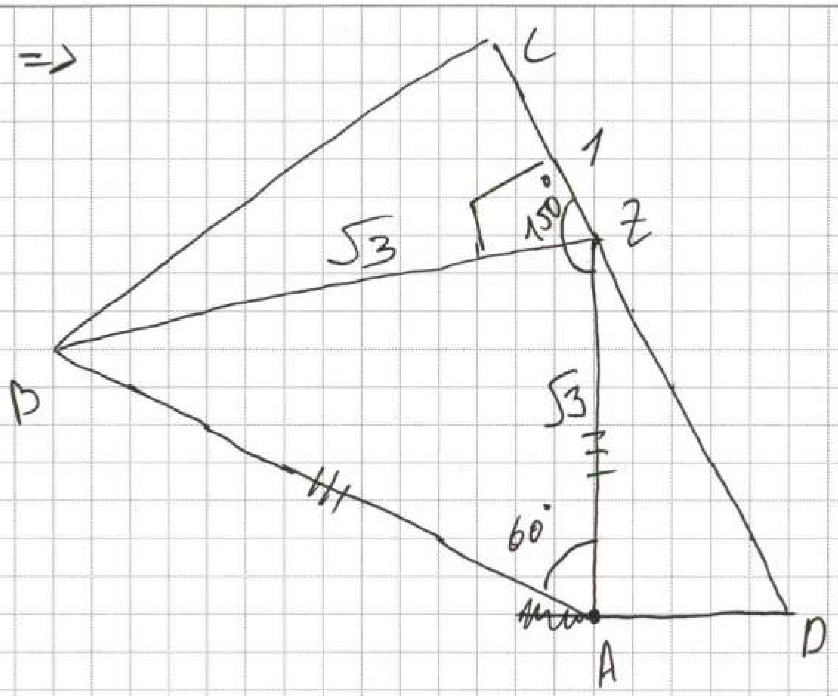
$\Rightarrow \angle AZD = 180° - \angle CZA = 30 \Rightarrow$

в $\triangle AZD$: $\angle Z = 30°$, $2AD = ZD \Rightarrow$

$\angle DAZ = 90° \Rightarrow AZ = \sqrt{ZD^2 - AD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

и так как $\angle DAZ = 90° \Rightarrow \angle BAZ = 60°$

=>



=> в $\triangle BAZ$: $BA = ZA$, $\angle A = 60°$ =>
$\triangle BAZ$ — равносторонний проведем
BZ => $BZ = ZA = \sqrt{3}$, также
$\angle BZC =$ ~~180~~ $\angle CZA - \angle BZA =$
$= 150° - 60° = 90°$ =>
=> в $\triangle BZC$ по Т. Пифагора:
$BC = \sqrt{BZ^2 + CZ^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} =$
$= 2$

Ответ: $BC = 2$.

№7. Пусть: $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$ Алгоритм:

$(a_1b_1+a_1+1)(b_1c_1+b_1+1)(a_1c_1+c_1+1)\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$(a_1b_1^2c_1+a_1b_1^2+a_1b_1+a_1b_1c_1+a_1b_1+a_1+b_1c_1+b_1+1)(a_1c_1+c_1+1)\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$(b_1(a_1b_1c_1+1)+(a_1b_1c_1+1)+a_1b_1^2+2a_1b_1+a_1)(a_1c_1+c_1+1)\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$\Rightarrow (a_1b_1^2+2a_1b_1+a_1)(a_1c_1+c_1+1)\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$a_1^2b_1^2c_1+a_1b_1^2c_1+a_1b_1^2+2a_1^2b_1c_1+2a_1b_1c_1+2a_1b_1+$
$+a_1^2c_1+a_1c_1+1\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$a_1b_1(a_1b_1c_1+1)+a_1b_1+a_1b_1c_1(b_1+1)-a_1b_1c_1+$
$+2a_1b_1c_1+2-1+(a_1b_1^2+2a_1^2b_1c_1+a_1^2c_1+a_1c_1)\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$a_1b_1-a_1b_1c_1-1+(a_1b_1^2+2a_1^2b_1c_1+a_1^2c_1+a_1c_1)\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$a_1b_1+a_1b_1^2+2a_1^2b_1c_1+a_1^2c_1+a_1c_1\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

т.к. НОД$(a_1b_1c_1+1;a_1)=1$, потому что
НОД$(a_1b_1c_1+1;a_1)=$ НОД$(a_1b_1c_1+1-a_1\cdot(b_1c_1);a_1)=$
$=$ НОД$(1,a_1)=1$

то можем поделить обе части на a_1:

$b_1+b_1^2+2a_1b_1c_1+a_1c_1+c_1\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0\Rightarrow$

$b_1+b_1^2+a_1c_1+c_1-2\underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv}0$

$\Rightarrow (a_1b_1+a_1+1)-(a_1-b_1-c_1+3)\underset{a_1b_1c_1}{\equiv}0$

~~Покажем, что a_1, b_1, c_1 — четны:~~
~~если a_1, b_1, c_1 — нечетны ⇒~~
~~$(a_1b_1+a_1+1)\cdot(b_1c_1+b_1+1)(c_1a_1+c_1+1)$ — нечетно~~
~~$a_1b_1c_1$ — четно, но нечетное не может делиться на четное.~~
~~если 2 нечетных: без ограничения общности a_1 — четно, b_1, c_1 — нечетны:~~
~~⇒ $a_1b_1+a_1+1$ — нечетно; $b_1c_1+b_1+1$ — нечетно,~~
~~$c_1a_1+c_1+1$ — четно и $a_1b_1c_1+1$ — нечет~~

Допустим частное может быть квадратом простого числа ⇒ покажем, что
Покажем, что a_1, b_1, c_1 — четные ⇒
если a_1, b_1, c_1 — нечетные ⇒
$(a_1b_1+a_1+1)\cdot(b_1c_1+b_1+1)(c_1a_1+c_1+1)$ — нечетно,
а $a_1b_1c_1$ +1? — четно, но нечетное не может делиться на четное
если 1 нечетно: без ограничения общности a_1 — нечет; b_1, c_1 — четны ⇒ $(a_1b_1+a_1+1)(b_1c_1+b_1+1)\cdot(c_1a_1+c_1+1)$ — четно, а $a_1b_1c_1+1$ — нечет
если 2 нечетных то же самое что и если 1 нечетное
если 3 нечетных то же самое что и все четны

$\Rightarrow$ в случае x с 0 и 3 нечетными: противоречие
в случае x с 1 и 2 нечетными получаем четное частное, а значит если

$$\frac{(a_1b_1+a_1+1)(b_1c_1+b_1+1)(c_1a_1+c_1+1)}{a_1b_1c_1+1}=p^2,$$

p-простое и $p^2 \vdots 2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow$

$$(a_1b_1+a_1+1)(b_1c_1+b_1+1)(c_1a_1+c_1+1)=4a_1b_1c_1+4$$

после того как раскроем скобки получим $3a_1b_1c_1$ — способами указанными стрелками, также получим $a_1^2b_1^2c_1^2$ умножая первого слагаемого каждой из 3^{ex} скобок и получим $a_1+b_1+c_1+1$,
получим
$a_1=a_1\cdot 1\cdot 1$
$b_1=1\cdot b_1\cdot 1$
$c_1=1\cdot 1\cdot c_1$
$1=1\cdot 1\cdot 1$

все слагаемые со знаком + $\Rightarrow$ знаем, что

$$3a_1b_1c_1+a_1^2b_1^2c_1^2+a_1+b_1+c_1+1>4a_1b_1c_1+4$$

т. к. $a_1^2b_1^2c_1^2 \geq a_1b_1c_1$ и $a_1+b_1+c_1>3$ т. к.

Случай с $a_1=b_1=c_1=1$ не подходит
$\Rightarrow$ равенство не достигнуто.
потому что: $\frac{(1+1+1)(1+1+1)(1+1+1)}{1\cdot1\cdot1+1}=\frac{9}{4}$
– не целое число.

$\Rightarrow$ случай с 2 или 1 нечетными числами не подходит $\Rightarrow$
Все числа четные $\Rightarrow$

знаем: $a_1b_1+a_1+1-(a_1-b_1-c_1\overset{-a_1c_1}{+3}) \underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv} 0$

Допустим $a_1b_1+a_1+1 \underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv} 0 \Rightarrow$

$b_1+c_1-a_1-3+a_1c_1 \underset{a_1b_1c_1+1}{\equiv} 0 \Rightarrow b_1+c_1-a_1-3 \vdots a_1b_1c_1+1$

$\Rightarrow |b_1+c_1\overset{+a_1c_1}{-a_1}-3| \geq a_1b_1c_1+1$

т.к. $a_1c_1>a_1$ т.к. a_1, c_1, b_1 – четн
$\Rightarrow b_1+c_1>3$ и $a_1c_1>a_1 \Rightarrow$

$|b_1+c_1+a_1c_1-a_1-3| = b_1+c_1+a_1c_1-a_1-3 \geq a_1b_1c_1+1$
$\Rightarrow a_1(c_1-1-b_1c_1) \geq 4-b_1-c_1 \quad |\cdot(-1)$
$a_1(b_1c_1+1-c_1) \leq b_1+c_1-4$
a_1 – четно $\Rightarrow a_{1min}=2 \Rightarrow$
$2b_1c_1+2-2c_1 \leq b_1+c_1-4$
$2b_1c_1 \leq b_1+3c_1-6$

$c_1(2b_1-3) \le b_1-6$

Если c_1 — четно $\Rightarrow c_{1min}=2 \Rightarrow$

$4b_1-6 \le b_1-6$

~~b_1 — четно $\Rightarrow b_{1min}=2 \Rightarrow$~~

$\Rightarrow 4b_1 \le 0$ — противоречие

$\Rightarrow a_1b_1+a_1+1 \underset{a_1b_1c_1+1}{\not\equiv} 0$ • Конец Алгоритма

$\Rightarrow ab+a+1 \underset{abc+1}{\not\equiv} 0$

$\Rightarrow$ теперь: Пусть: $c=a_1$; $a=b_1$; $b=c_1$

$\Rightarrow (a_1b_1+a_1+1)=(ca+c+1)$

$(b_1c_1+b_1+1)=(ab+a+1)$

$(c_1a_1+c_1+1)=(bc+b+1)$

$\Rightarrow$ повторим Алгоритм с $c=a_1$; $a=b_1$; $b=c_1$ $\Rightarrow$

получим что $a_1b_1+a_1+1 \underset{a_1b_1c_1+1}{\not\equiv} 0$

$\Rightarrow ca+c+1 \underset{abc+1}{\not\equiv} 0$

Теперь: Пусть $b=a_1$; $a=c_1$; $c=b_1$

$\Rightarrow (a_1b_1+a_1+1)=(cb+b+1)$

$(b_1c_1+b_1+1)=(ca+c+1)$

$(c_1a_1+c_1+1)=(ab+a+1)$

Повторим ~~а~~ Алгоритм и получим что $a_1 b_1 + a_1 + 1 \underset{\cancel{a_1b_1c_1} \; a_1b_1c_1+1}{\equiv} 0 \Rightarrow$

$bc + b + 1 \underset{abc+1}{\equiv} 0$

$\Rightarrow ab + a + 1 ; ca + c + 1 ; bc + b + 1 \underset{abc+1}{\equiv} 0$

$\Rightarrow$ после ~~[illegible]~~ деления $(ab+a+1)(ca+c+1)(bc+b+1)$ на $abc+1$ у $ab+a+1$, $ca+c+1$, ~~[illegible]~~ $bc+b+1$ останется хотя-бы 1 простой делитель которого остался после деления т. к. $ab+a+1; ca+c+1; bc+b+1 \underset{abc+1}{\equiv} 0$

$\Rightarrow \dfrac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} = X$

X имеет хотя-бы 3 простых делителя, ~~они могут быть равны между собой а $X = p^2$, где p — простое~~ :

~~но~~ $X = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$; p_1; p_2 и p_3 могут быть равны между собой, и по условию $X = p_4^2 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ ~~[illegible]~~ — противоречие $\Rightarrow$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306257 — номер участника

Ответ: не может.

№8.

Упорядочим гири: $a_1 < a_2 \le \dots < a_{50}$

$\Rightarrow a_{50} + \dots + a_{27}$ — самый тяжелый ~~???~~ комплект из 24 гирь $\Rightarrow$ ~~??~~ их уравновесили 25-ю 26 ост. гирь $\Rightarrow$

если 25:

$a_{50} + \dots + a_{27} \le a_{26} + \dots + a_{2}$

Значит: ~~a_{50} ... $a_{26} + a \dots + a_3$~~ $\le$

$a_2 + \dots + a_{25} < a_{25} \dots + a_{48}$

$\Rightarrow a_{50} + \dots + a_{27} \le (a_{26}) + a_{25} + \dots + a_{48}$

$a_{49} + a_{50} \le$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Номер участника	Класс
41306257	8

ФИО участника: Носов Андрей Витальевич

Задача № 7

Вопрос: "Может ли быть их частное ...."

~~Чем~~ Частное каких чисел?

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ

Частное чисел:

число: $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$

число: $abc+1$

Задача №

Вопрос

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ