Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 51

пусть, число ~~x~~ X — 2-хорошее

$x = l + (l+1) = 2l + 1 \Rightarrow x$ — нечетное
$(l \in \mathbb{N})$

$\exists X$ — 3-хорошее:

$x = l + (l+1) + (l+2) = 3l + 3 \Rightarrow x \vdots 3$

$\exists x$ — 4-хорошее:

$x = l + (l+1) + (l+2) + (l+3) = 4l + 6 \Rightarrow x \vdots 2$

$\exists x$ — 5-хорошее:

$x = l + (l+1) + (l+2) + (l+3) + (l+4) = 5l + 10 \Rightarrow x \vdots 5$

$\exists x$ — 6-хорошее:

$x = l + (l+1) + (l+2) + (l+3) + (l+4) + (l+5) = 6l + 15 \Rightarrow x \not\vdots 2$

+ТМ

7КА

Ответ: ~~5 пятерок~~ 4 пятерки

Пример:

$n = 45 = \underbrace{22+23}_{2\text{-хорошее}} = \underbrace{14+15+16}_{3\text{-хорошее}} = \underbrace{7+8+9+10+11}_{5\text{-хорошее}} = \underbrace{5+6+7+8+9+10}_{6\text{-хорошее}}$

Оценка:

пусть, за число n Вася может получить ≥ 5 пятерок
т.к. ~~от~~ чисел > 1 и < 7 всего 5, пятерок ровно 5 $\Rightarrow$
$\Rightarrow n$ является 2-, 3-, 4-, 5-, 6- хорошим.

~~в частности~~ из 2-хорошести, $n \not\vdots 2$
из 4-хорошести, $n \vdots 2$ $\Rightarrow$ (?!)

$\Rightarrow$ ≥ 5 пятерок не бывает $\Rightarrow$ ≤ 4

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

построим двудольный граф:

„левая" доля – ученики

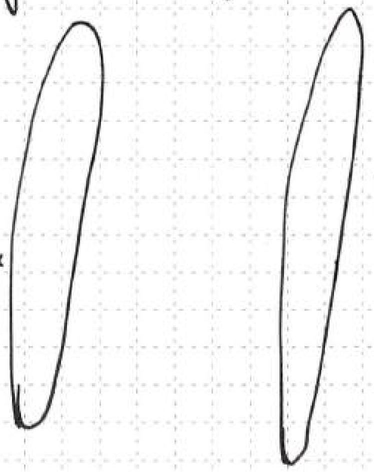
„правая" – пары кружков

~~соединены ребром ученик~~

ребро $\Leftrightarrow$ ученик является для пары кружков общим

пусть каждый ученик ходит в k кружков

l вершин



$\frac{7\cdot 6}{2} = 21$ вершина

в левой доле степень каждой вершины $\frac{k(k-1)}{2}$

в правой, по условию, 3

тогда, посчитаем кол-во ребер двумя способами

с одной стороны, это $\frac{l k(k-1)}{2}$

с другой, $21 \cdot 3$

$l \cdot k(k-1) = 21 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

при этом $6 < l < 60$ и $l, k \in N$

тогда, l является натуральным делителем $2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$

$l \in \{1; 2; 3; 6; 7; 9; 14; 18; 21; 42; 63; 126\}$

т.к. $6 < l < 60$,

$l \in \{7; 9; 14; 18; 21; 42\}$

$l = 7 \Rightarrow k(k-1) = 18$ – не достигается при $k \in N$

$l = 9 \Rightarrow k(k-1) = 14$ – не достигается при $k \in N$

$l = 14 \Rightarrow k(k-1) = 9$ – не достигается при $k \in N$

$l = 18 \Rightarrow k(k-1) = 7$ – не достигается при $k \in N$

$l = 21 \Rightarrow k(k-1) = 6 \Rightarrow k = 3$

$l = 42 \Rightarrow k(k-1) = 3$ – не достигается при $k \in N$

Значит, единственный возможный вариант – $l = 21$ (и каждый ученик ходит в 3 кружка)

Приведем пример на это количество:

1-ый ученик: 1, 2, 3 кружки
2-ой: 2, 3, 4
3-ий: 3, 4, 5
⋮
7-ой: 7, 1, 2
— номера подряд

8-ой: 1, 3, 5
9-ый: 2, 4, 6
⋮
14-ый: 7, 2, 4
— номера через один

15-ый: 1, 4, 7
16-ый: 2, 5, 1
⋮
21-ый: 7, 3, 6
— номера через два

~~Кружки с номерами подряд общие для 2 учеников с 1-го по 7-й и одного~~

Задача № 2 Лист 3 из 3 Номер участника: 51

При такой расстановке:
кружки с номерами подряд общие для 2 учеников из 1-7 и 1 ученика из 15-21

с номерами через 1 общие для 1 ученика из 1-7 и ~~для~~ для 2 учеников 8-14

с номерами через 2 общие для 2 учеников ~~в~~ из 15-21 и 1 ученика из 8-14

(здесь мы мыслим номера кружков как остатки по модулю 7: 1 и 7 кружки имеют номера подряд; 5 и 1 - через два и т.д.)

Ответ: 21

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 51

Докажем вспомогательное неравенство: для чисел $a, b, c \geq 0$ и $a+b+c = a^2+b^2+c^2$ выполняется:

7им

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} \quad (*)$$

п+п

Док-во

т.к. $a, b, c \geq 0$, $(*) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a^2-2a+1)(a+b+c+1) \leq (a^2-a+1)(b+c+1)$$

$$\Leftrightarrow a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{a^2c}+\cancel{a^2}-2a^2-2ab-2ac-\cancel{2a+a+b+c+1} \leq \cancel{a^2b}+\cancel{a^2c}+\cancel{a^2}-\cancel{ab}-\cancel{ac}-\cancel{a}+\cancel{b+c+1}$$

$$a^3-2a^2-ab-ac \leq 0$$

$$\cancel{a^3 \leq 2a^2+ab+ac}$$

$$\cancel{a^2 \leq a}$$

$$a(a^2-2a-b-c) \leq 0$$

$$\cancel{a^2-2a-b-c \leq 0}$$

$$a^2-2a-b-c = a^2-a^2-b^2-c^2-a = -(a+b^2+c^2) \leq 0$$

$$a \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$a(a^2-2a-b-c) \leq 0 \quad \text{чтд}$$

теперь, для исходного нер-ва:

$$\text{левая часть} \leq \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1} + \frac{b^2-b+1}{b+a+c+1} + \frac{c^2-c+1}{c+a+b+1} = \frac{3+a^2+b^2+c^2-a-b-c}{a+b+c+1} =$$

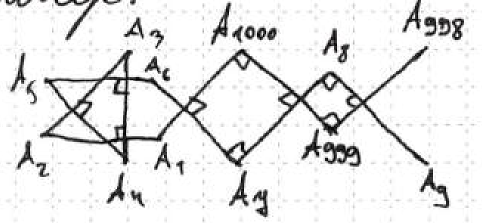
$$= \frac{3}{a+b+c+1}$$

чтд

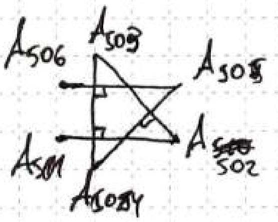
по вспом. нер-ву для всех сдвигов a, b, c

Ответ: 1

Пример:



- - - - -



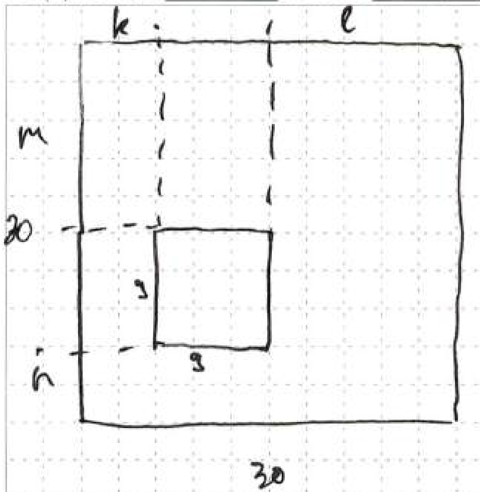
Оценка: пусть, возможно $k=2$

Введем декартовы координаты так, что ни одна из осей не параллельна и не перпендикулярна ни одному из ребер

выберем из „перпендикулярных" точек пересечения „самую нижнюю"

— КА 0

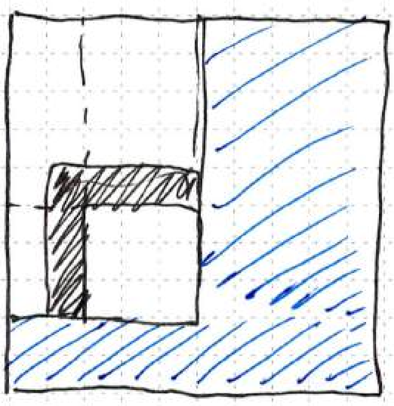
Задача № 5 Лист 1 из 2 Номер участника: 51



~~Во~~ От противного: пусть есть квадрат ~~3×3~~ 9×9 такой, что в нём ≤ 10 королей

т.к. $k+l=21$
$m+n=21$ ⇒ из каждой пары k, l и m, n есть ровно 1 нечётное число (НУО это k и m)

тогда:



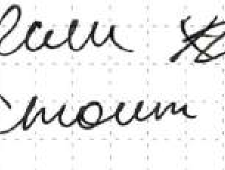
$l, n \vdots 2$ ⇒ ▨ область можно разбить на квадраты 2×2

также, оставшуюся часть без чёрного уголка из 19 клеток тоже можно разбить на 2×2 (т.к. $m-1 \vdots 2$ и $k-1 \vdots 2$)

всего на кв. 2×2 разбито 800 клеток на них стоит ~~≥200~~ $\geq 210 - x$ королей, где x – кол-во королей в уголке

если $x < 10$, то сущ. квадрат 2×2 где стоит ≥ 2 короля ⇒ они друг друга бьют (?!)

если $x \geq 10$, то, во-первых, $x = 10$ (иначе в ~~полоске~~ уголке есть 2 короля в соседних клетках), а во-вторых, если $x=10$ короли стоят так:



Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

здесь, короли соседние с угловой клеткой бьют друг друга (?!)

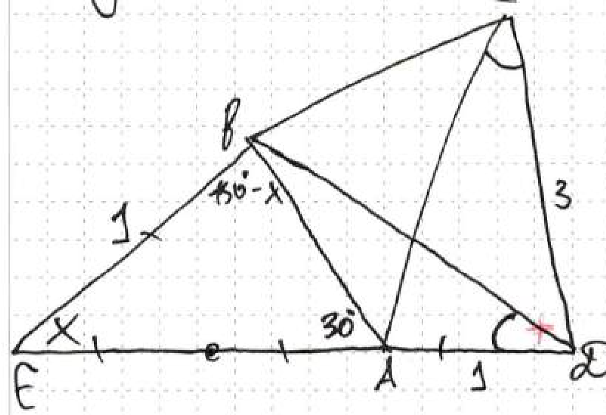
в любом случае при существовании квадрата 9×9 с ≤ 10 королями мы получим противоречие $\Rightarrow$ в любом квадрате 9×9 их ≥ 11

чтд

Задача № 6 Лист 1 из 2 Номер участника: 51

6
ДП
+ реш с арифм ошибкой

удвоим отрезок DA за точку A:



КА

Пусть, $\angle CDA = X$

тогда, $\triangle \cancel{CDA}\ ACD \overset{I}{=} \triangle BDE$ $\left(\begin{array}{l}\angle BDE = \angle DCA \\ DE = CD \\ BD = AC\end{array}\right)$

$\Downarrow$

$\angle BED = x$; $BE = AD = 1$

$\angle BAE = 30°$ как смежный к $150°$

$\angle EBA = 150° - x$ по сумме углов $\triangle EBA$

тогда, по т. Синусов для $\triangle EBA$:

Найден $\angle CDA$

$$\frac{EA}{EB} = \frac{\sin(150°-x)}{\sin 30°} = 2\sin(150°-x)$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$\sin(150°-x) = 1 \Rightarrow 150° - x = 90° \Rightarrow x = 60°$

(т.к. $0 \le 150 - x \le 180$)

$\Downarrow$

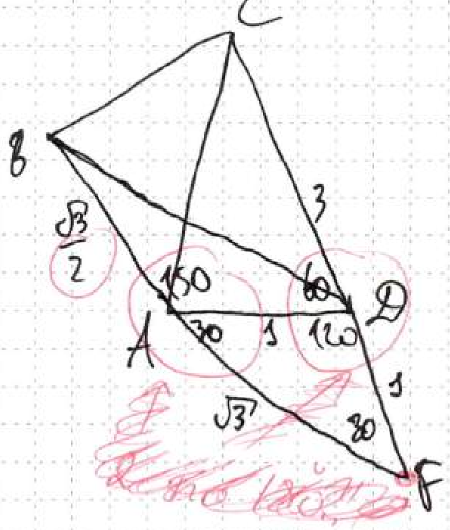
$150° - x = 90°$

$\Downarrow$

по т. Пифагора для $\triangle EBA$, $BA = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BA = \sqrt{3}$

Задача № 6 Лист 2 из 2 Номер участника: 51



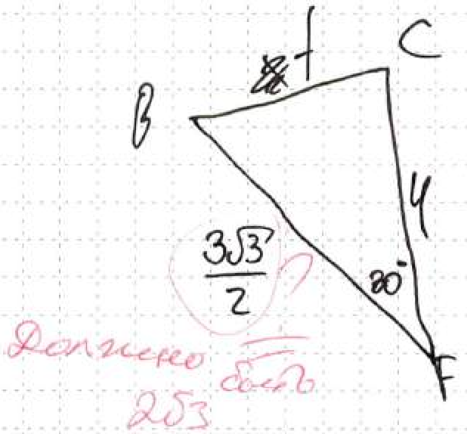
Продлим BA и CD до пересечения (они пересекутся с именно этой стороны т.к. $60^\circ + 150^\circ > 180^\circ$)

$\angle DFA = 30^\circ$ по сумме углов $\triangle DFA$

$\Downarrow$

$DF = AD = 1 \Longrightarrow$ по т. Синусов для $\triangle DAF$, $AF = \sqrt{3}$

теперь:



по т. Косинусов:

$$\cancel{x}t^2 = 16 + \frac{27}{4} - 2\cdot\frac{3\sqrt3}{2}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt3}{2} =$$

$$= 16 + \frac{27}{4} - 18 = \frac{19}{4}$$

$$t = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

Ответ: $BC = \frac{\sqrt{19}}{2}$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № ~~3~~ 7 Лист 1 из 3 Номер участника: 51

5ТМ 6ВД

1° ни одно из a, b, c не делится на 2 (пункт, монет)

$abc+1 \vdots 2$

число из условия $\vdots 2$ (?!) т.к. нечёт. число : четное

2° одно $\vdots 2$, другие 2 – нет
(НУО a)

$ac+c+1 \vdots 2 \Rightarrow$ число из условия $\vdots 2$

$abc+1 \not\vdots 2 \Rightarrow$ частное $\vdots 2 \Rightarrow p=2$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=$

$= a^2b^2c^2 + ab\cdot c + bc\cdot a + ac\cdot b + a\cdot b\cdot c + a^2bc + ab^2c + abc^2 +$

$+ \underbrace{f(a,b,c)}_{\text{многочлен}} > 4abc+4$ (?!)

от a,b,c с положительными коэф-тами

3° 2 четных, одно нечетное
(НУО – c)

$ac+c+1 \vdots 2$
$abc+1 \not\vdots 2$ $\Rightarrow p=2$

аналогично 2°, (?!)

все сравнения в ~~дальнейшем решении~~ 4.1°
указаны в $\mathbb{F}_p$

в 4.2° в $\mathbb{Z}_{p^{\alpha+2}}$

4.1° из исх. выражения есть ≥ 2 скобки, делящиеся на p (Н/О $ac+c+1$ и $ab+a+1$)

$ac+c+1 \,\vdots\, p \Rightarrow c \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{a+1}$

$ab+a+1 \,\vdots\, p \Rightarrow b \underset{p}{\equiv} -\frac{a+1}{a}$

$abc \underset{p}{\equiv} \frac{a\cdot(a+1)}{a\cdot(a+1)} = 1$

$abc+1 \underset{p}{\equiv} 2$ (т.к. аналогично 2° и 3°, $p\neq 2$, $abc+1 \not\vdots\, p$)

$bc+b+1 \underset{p}{\equiv} -\frac{(a+1)\cdot a}{(a+1)\cdot a}+1 = 0$

$\Downarrow$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \,\vdots\, p^3$ / $\Rightarrow$ частное $\vdots\, p^3 \neq p^2$ (?!)

$abc+1 \not\vdots\, p$

4.2° одна скобка $\vdots\, p^{\alpha+2}$, две другие $\not\vdots\, p$ (Н/О $ab+a+1$)

($\alpha \geq 1$) тогда, $abc+1 \,\vdots\, p^{\alpha}$

$ab+a+1 \underset{p^{\alpha+2}}{\equiv} 0$

$b \underset{p^{\alpha+2}}{\equiv} -\frac{a+1}{a}$

$abc \underset{p^{\alpha}}{\equiv} -1$

$\parallel\!\!\!\!|$

$-(a+1)c$

$\Downarrow$

$ac+c+1 \,\vdots\, p^{\alpha}$ (?!)

Задача № 4 Лист 3 из 3 Номер участника: 51

4.3° одна скобка $\vdots p^2$, две другие и $abc+1$ $\vdots p$ (и, очевидно, $\vdots p^3$)

$b \underset{p^2}{\equiv} -\frac{a+1}{a}$

$ac+c+1 \vdots p^2$

$b(c+1)+1 \underset{p^2}{\equiv} -\frac{ac+c+1}{a}$

$abc+1 \underset{p^2}{\equiv} -ac-c+1$

И что?