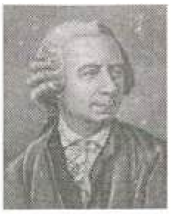


Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-6 - 3В
аудитория – посадочное место

41306281
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ пр	+ Пк	— МК	
7 АЮ	7 Ле	7 Ау	1 АБ	22

№1. Вася может получить до 5 пятерок (2; 3; 4; 5; 6)

Пусть число n ~~просто~~ является k-хорошим одновременно при $k=2$ и $k=4$.

Тогда если $k=2$, то n — нечетное (т.к. является суммой чёт и нечёт числа), а если $k=4$, то n представимо в виде суммы двух чёт. и двух нечёт. чисел. $\Rightarrow$ n — четное, но при $k=2$ $n \not\vdots 2$ $\Rightarrow$ таких n нет $\Rightarrow$ ~~Вася~~ Вася не мог получить за обе из них ($k=2$ / $k=4$) пятерки $\Rightarrow$ всего пятерок $\leq$ $\leq 5-1=4$ пятерок.

Пример на 4:

$n = \cancel{50}\ 45 = \underbrace{22+23}_{k=2} = \underbrace{14+15+16}_{k=3} =$

$= \underbrace{7+8+9+10+11}_{k=5} = \underbrace{5+6+7+8+9+10}_{k=6}$

Ответ: 4 пятёрки.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

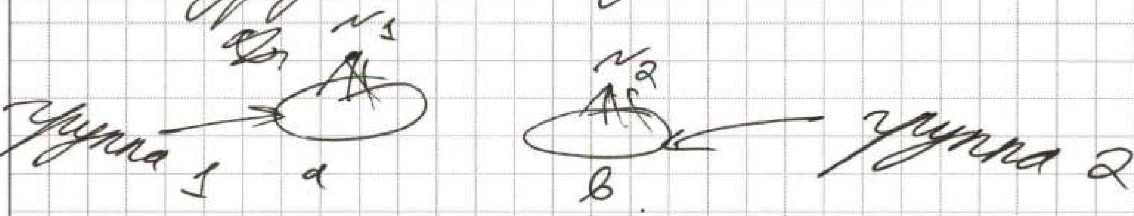
Первый день, заключительный этап

8 41306281

класс номер участника лист 2 из 13

№2.

Факт (1): Давайте докажем, что в каждый кружок ходят одинаковое кол-во детей. Пусть в кружок ~~один~~ один ходят a детей, а в другой b детей.



Тогда сделав граф, где вершины двух типов: 1 тип: кружки (7 шт); 2 тип: дети; а рёбра проведём между ребёнком и кружком, если ребёнок его посещает. В группу 1 входит $a+18$ ребер (a — от кружка №1, а 18 — от остальных 6 кружков (т.к. по усл. „общих" детей у любых двух кружков равно 3) (по 3 от каждого)). Аналогично рёбер из группы 2 выходят $b+18$. Тогда ст. каждого ребёнка в группе 1 равна $\frac{a+18}{a}$ (т.к. всего детей a), а в группе 2 $\frac{b+18}{b}$. Т.к. у каждого ребёнка одинаковая степень в нашем графе (т.к. каждый ребенок посещает одинаковое кол-во кружков), то

$$\frac{a+18}{a} = \frac{b+18}{b}$$

$\Rightarrow 1+\frac{18}{a} = 1+\frac{18}{b} \Rightarrow \frac{18}{a} = \frac{18}{b} \Rightarrow$

$a = b$.

ч.т.д. (к Факту ①)

Пусть тогда у всех кружков по x детей. ~~(по Факту ②)~~

Тогда как мы узнали в док-ве Факта ① ст. ~~[illegible]~~ каждого ~~[illegible]~~ ребёнка-вершины ровно $\frac{x+18}{x}$. Это число целое (натуральное) $\Rightarrow (x+18) \vdots x \Rightarrow 18 \vdots x \Rightarrow$ делители 18 ~~[illegible]~~

$\Rightarrow x \in (1; 2; 3; 6; 9; 18)$

Т.к. $x \geq 3$ (т.к. есть 3 „общих" у двух ~~[illegible]~~ кружков) $\Rightarrow x \in (1, 2)$ не подходит.

Если $x=3$, то ~~[illegible]~~ нетрудно понять, что эти 3 человека ходят во все кружки $\Rightarrow$ всего детей ~~[illegible]~~ трое, но $3 \neq 6$ (Усл.)

$\Rightarrow x=3$ не подходит.

Если $x=6$, то степень каждой вершины-ребёнка ровно $(6+18)/6=4$.
~~Это~~ Тогда рёбер, исходящих из всех вершин-кружков ровно $x\cdot 7$ (кол-во кружков) $= 42$.
Тогда всего детей $\frac{42}{4}$ (т.к. каждому ребенку приходят по 4 ребра, а рёбер 42), но $\frac{42}{4}$ — не целое $\Rightarrow$ т.к. так не может быть, то $x=6$ не подходит.
Если $x=18$, то ст. каждой верш.-ребёнка ровно $\frac{(18+18)}{18}=2$. Тогда ~~их~~ рёбер, исходящих из вершин-кружков $x\cdot 7=18\cdot 7$.
Тогда всего детей $\frac{18\cdot 7}{2}=63>60$
$\Rightarrow x=18$ не подходит.
~~Если~~ При $x=9$ ст. каждой в-р ровно $\frac{9+18}{9}=3$. Всего рёбер $x\cdot 7=63$.
$\Rightarrow$ всего детей $\frac{63}{3}=21$.
Пример на 21 ребёнка:

Ребёнок	Кружки
1	1,2,3
2	1,2,3
3	1,2,3
4	1,4,5
5	1,4,5
6	1,4,5
7	1,6,7
8	1,6,7
9	1,6,7
10	2,4,6
11	2,4,6
12	2,4,6
13	2,5,7
14	2,5,7
15	2,5,7.
16	3,4,7
17	3,4,7
18	3,4,7
19	3,5,6
20	3,5,6
21	3,5,6

+

Проверка:

$6 < 21 < 60$

Кружок	Общие дети	Кружок
1	1,2,3	2
1	1,2,3	3
1	4,5,6	4
1	4,5,6	5
1	7,8,9	6
1	7,8,9	7
2	1,2,3	3
2	10,11,12	4
2	10,11,12	6
2	13,14,15	5
2	13,14,15	7
3	16,17,18	4
3	19,20,21	5
3	19,20,21	6
3	16,17,18	7
4	4,5,6	5
4	10,11,12	6
4	16,17,18	7
5	19,20,21	6
5	13,14,15	7
6	7,8,9	7

Пример верный

Ответ: 21.

№3

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$.

Докажем, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

$a^2+b^2+c^2 = \frac{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)}{2}$ по нер-ву Коши $\geq$

$\geq \frac{2(ab+ac+bc)}{2} = ab+ac+bc$

ч.т.д.

Если $a^2+b^2+c^2=a+b+c$, то

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = a+b+c + \underbrace{2(ab+bc+ac)}_{x}$

$\Updownarrow$

$(a+b+c)^2 = (a+b+c)+x$

$\Updownarrow$

$(a+b+c)(a+b+c-1) = x$

$x \leq 2(a^2+b^2+c^2) = 2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b+c-1) \leq 2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow$ т.к. $(a+b+c)>0$ (т.к. если 0, то $a=b=c=0$ подставив в условие, нетрудно заметить, что и условие, и то, что надо д-ть, верны), то

$a+b+c-1 \leq 2$

$\Rightarrow a+b+c \leq 3$.

~~Тогда если~~ ~~$a \geq b \geq c$ и $a \geq 2$, то $a^2+b^2+c^2 \geq 4$ (т.к. $a^2 \geq 4$) $\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow a+b+c \geq 4$, но $a+b+c \leq 3$ (к)~~
~~$\Rightarrow$ $a, b, c < 2$.~~

Если одна из $a, b, c \geq 2$ (пусть a) тогда $a^2+b^2+c^2 \geq 4$ (т.к. $a^2 \geq 4$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow a+b+c \geq 4$, но $a+b+c \leq 3 \Rightarrow$ противоречие.
$\Rightarrow a, b, c < 2$.
$\Rightarrow (a-1)^2 < b+c+1$ (т.к., если $(a-1)^2 \geq b+c+1$, то $(a-1)^2 \geq 1$,
~~$\Rightarrow$ либо $a=b=c=0$, либо $a \geq 2$, но $a < 2$ $\Rightarrow$ и при $a=b=c=0$~~

если $a < 1$ и $(a-1)^2 \geq 1$, то $a=0$, а т.к. $(a-1)^2 \geq b+c+1$, то $b+c=0$
т.е. $a=b=c=0$ (нер-во в усл. вып.),
если $a \geq 1$ и $(a-1)^2 \geq 1$, то $a \geq 2$, но $a < 2 \Rightarrow (a-1)^2 < b+c+1$).

Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} < 1$.

Лемма 1: если $\frac{a}{b} < 1$ (т.е $a<b$), $a,b \geq 0, b \neq 0$, то

$\frac{a}{b} \leq \frac{a+x}{b+x}$, где $x \geq 0$.

Д-во:
$\frac{a}{b} \overset{?}{\leq} \frac{a+x}{b+x} \Leftrightarrow a(b+x) \overset{?}{\leq} b(a+x) \Leftrightarrow ax \overset{?}{\leq} bx$ т.к. $a<b$

то верно. ч.т.д.

Т.к. $(a-1)^2$, $b+c+1 \geq 0$; $b+c+1 \neq 0$, $a \geq 0$, то по лемме 1

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}.$$

Сделав так с ост. дробями, получим, что:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{a+b+c+1} = \frac{a+b+c-2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1}$$

ч.т.д.

№4

Оценка

Давайте разобьём звенья на несколько групп так, чтобы звенья в одной группе были параллельны (или совпадали?) (принадлежали прямым, которые ||), а звенья из разных групп — не параллельны. Т.к. соседние (в ломаной) звенья не параллельны $\Rightarrow$ групп ≥ 2.

Если их ровно 2 то звенья из разных групп перпендикулярны (но не обяз. пересекаются!) друг другу (иначе никакие звенья не пересекаются под углом 90°). Тогда соседние звенья (в ломаной) пересекаются под углом 90°. Очевидно, что в ломаной, где все углы прямые (между соседними звеньями) и все звенья равной длины, самопересечений быть не может. $\Rightarrow$ групп ≥ 3. Не очевидно!

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 41306281

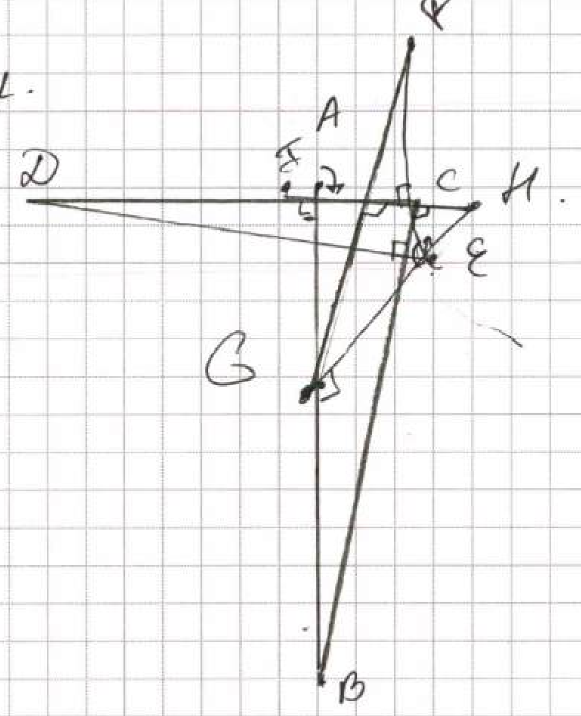
класс номер участника лист 10 из 13

Если группы 3, т.к. ~~[illegible]~~ наиб. $k \neq 0$ (т.к. ответ ≤ 250), ~~[illegible]~~ то найдётся группа, такая, что среди групп двух есть такая, что звенья из первой $\perp$ звеньям из второй ($\perp$, но не обяз. пересек.) $\Rightarrow$ звенья из 3-й группы не пересекаются под углом 80° ~~[illegible]~~ ни с какими звеньями из других групп (т.к. иначе есть две группы, в которых звенья из 1-й параллельны звеньям из 2-й)
$\Rightarrow$ групп ≥ 4.

Тогда по принципу Дирихле в какой-то группе $\le \frac{1000}{4} = 250$ звеньев $\Rightarrow$ т.к. группы разбиваются на пары по „перпендикулярности" (должны разбиваться), то у звена в группе, „перпендикулярной" группе с ≤ 250 звеньями, будет ≤ 250 пересеч. под углом 80°.
$\Rightarrow$ ответ ≤ 250.

~~Пример~~ Пример:

рис.



$AB \to BC \to CD \to DE \to$

Почему замкнётся?

Звено AB в группе №1; BC — №2; CD — №3; DE — №4.

$AB \perp CD$; $DE \perp CB$.

$AB = BC = CD = DE$.

$\angle ABC$ мы сделаем очень очень маленьким, тогда (т.к. пункт (1) AB будет равно AC, то $\triangle ABC$ — р/б $\Rightarrow \angle ACB < 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~перпенд~~ основание высоты из C на (AB) лежит на AB. (аналогично для всех ост случаев.)) т.к. $\angle CDE = 90° - \angle DCB = \angle ABC$, то

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Первый день, заключительный этап

8 — класс
41306281 — номер участника
лист 12 из 13

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$\angle CDE$ тоже „бесконечно" мал $\Rightarrow$ точки A и C, C и E очень близки друг к другу, а значит A и E близки.

Далее мы сделаем такие же действия для т. E, но в другую полуплоскость (т.е. если ~~прове~~ мы проводим из т. A звено „вниз" (к себе), то из т. E мы ~~зве~~ звено проведём ~~вверх~~)

~~Линия~~ звено EF точно пересечёт CD по факту (1) и угол будет $90°$ (т.к. $EF \parallel AB$, а $AB \perp CD$)

Звено $FG \perp DE$ по факту (1) и потому, что $FG \parallel BC$, $BC \perp DE$.

Если взять $\angle ABC = \angle EFG$ (углы с $\parallel$ сторонами) очень малым, то ~~DE будет~~ $FG \cap AB$ и $GH \cap AB$ и $GH \cap EF$, а также HI будет $\perp BC$ и GF, а точка I будет очень близка с точкой A.

Далее ~~мы~~ делаем уже абсолютно такой же процесс с точкой I (т.е.

вместо т. А, делаем действия из т. Г). Этот процесс повторим $\frac{1000}{8}=125$ раз.
Т.к. начальные точки очень близки друг к другу, то каждое звено из группы 1 будет пересекать под углом в 90° ~~во~~ звенья из группы 3, а также со звеньями из групп ~~...~~ 2 и 4.

Почему ломаная замкнётся?

⇒ каждое ~~...~~ звено пересекут 125 · 2 = 250 раз.

Ответ: 250.

8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-6 - 3В

аудитория – посадочное место

41306281

номер участника

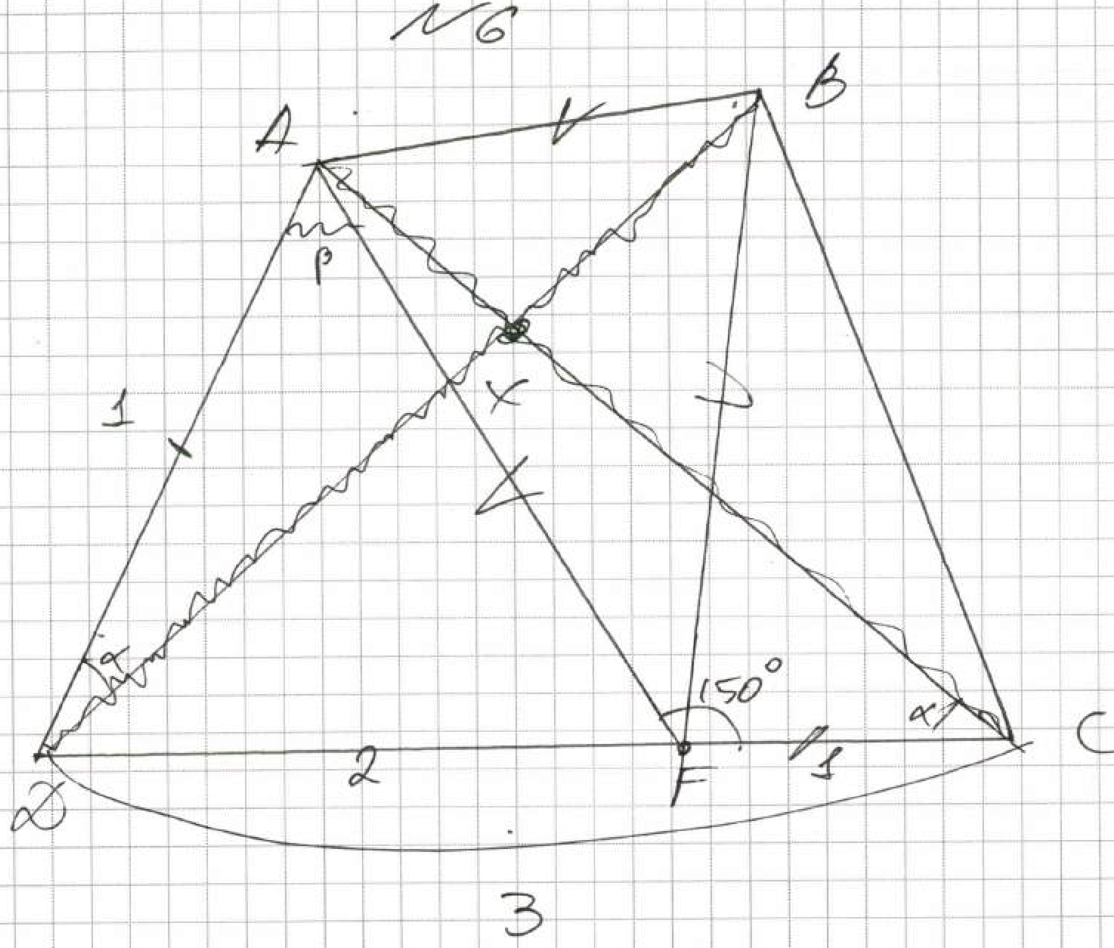
Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5	6	7	8	Σ
+пр	+ РХ	−. л.п.	Ф кю.	
7 4Ю V	7 ЕК	1 КН	Ø МК	15

№6



1) Пусть т. F ∈ [CD] и CF = 1

2) ⇒ △ ABD = △ ~~CFA~~ △ FAC. По двум сторонам и углу между ними.

3) ⇒ ∠CFA = ∠BAD = 150° (соотв. Эл.) и AF = AB.

4) т.к. CF = 1, то FD = 2 и т.к. ∠AFD = 30° и ∠FAD = β то по теореме синусов

$\frac{\sin 30°}{AD} = \frac{\sin\beta}{2} \Rightarrow \frac{\sin 30°}{1} = \frac{\sin\beta}{2}$ Т.к. $\sin 30° = \frac{1}{2}$, то

$\sin\beta = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$ => это возможно только если $\beta = 90^\circ$ => $\triangle AOF$ – п/у =>

=> $\angle BAF = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ =>

=> $\triangle ABF$ – р/с => $BF = AF = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{3}$

по т. Пифагора

=> $\angle BFA = 60^\circ$ => $\angle CFB = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

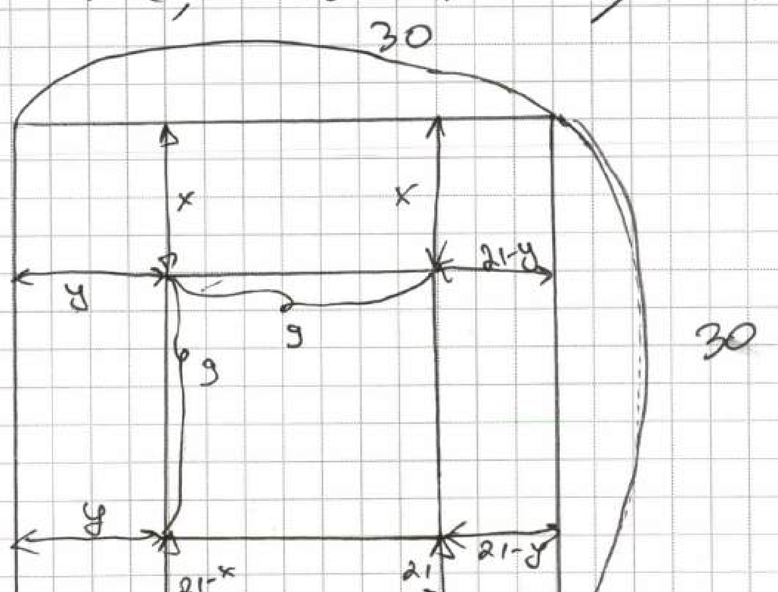
=> BC по т. Пифагора равен $\sqrt{BF^2+CF^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

Ответ: 2.

№ 1

Пусть найдётся такой 9×9, в котором ≤ 10 королей. Пусть он располагается так, как на рис. 1.

рис 1:



Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 41306281

класс номер участника лист 3 из 8

Пусть неизменные областности x и y чётные (т.к. $30-9=21$ — нечётное, то расст. от квадрата 9×9 до двух против краёв в сумме 21 $\Rightarrow$ ~~одно~~ из них чет, другое нечет)

Давайте ~~посмотрим~~ посчитаем, сколько максимум королей „вмещается" в прямоуг. чёт $\times$ чёт. Так как его можно разбить на квадраты 2×2, в которых ≤ 1 короля $\Rightarrow$ если прямоуг. $x \times y$, то ($y x : 2$) в нём $\leq \frac{xy}{4}$ короля

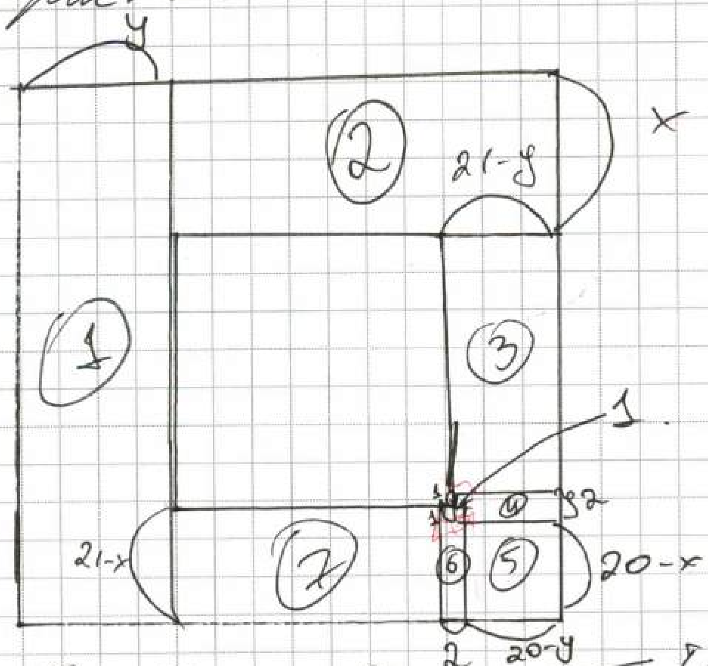
Если прямоуг (1) $2k$ на $2m+1$, то в него очевидно помещается не больше королей, чем в прямоуг. (2) $2k$ на $2m+2$ (т.к. прямоуг. (1) помещ в прямоуг (2)), а в прям. (2) помещ. $\leq \frac{2k\cdot(2m+2)}{4} = k(m+1) \Rightarrow$ в прямоуг (1) помещ. $\leq k(m+1)$.

Если прямоуг (1^*) $2k+1$ на $2m+1$, то в него помещ. $\leq$ королей, чем в $2k+2$ на $2m+2 \Rightarrow \leq (k+1)(m+1)$.

Разобьём область вокруг 9×9 на несколько частей (рис. 2):

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

рис. 2:



Королей:

- В ① $\le \frac{30\cdot y}{4}$, т.к. чёт × чёт
- В ② $\le \frac{x\cdot(30-y)}{4}$, т.к. чёт × чёт.
- В ③ $\le \frac{(22-y)8}{4}$, т.к. чёт × нечёт.
- В ④ $\le \frac{(22-y)\cdot 2}{4}$, т.к. чёт × нечёт.
- В ⑤ $\le \frac{(20-x)(20-y)}{4}$, т.к. чёт × чёт.
- В ⑥ $\le \frac{(22-x)2}{4}$, т.к. чёт × нечёт.
- В ⑦ $\le \frac{(22-x)8}{4}$, т.к. нечёт × чёт.

⇒ всего королей вокруг 9+9

$\le \frac{30\cdot y}{4} + \frac{(30-y)x}{4} + (22-y)\cdot 2 + \frac{22-y}{2} + \frac{22-x}{2} +$
$+ (22-x)2 + \frac{(20-x)(20-y)}{4} = 44+11+11+44+100=$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Второй день, заключительный этап

8 — класс
41306281 — номер участника
лист 5 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$=210.$ ~~т.к.~~

Если посмотреть на верхние (эти 3 клетки „особенные")
две клетки области ⑥ и левую верхнюю области ④, то нетрудно убедиться, что среди них ≤ 1 король. ~~т.к. они каждую~~
Тогда в ост. части зоны ④ (т.е.
$2\times(20-y)$? $\leq \frac{(20-y)2}{4} = \frac{20-y}{2}$ (т.к. чёт $\times$ чёт)
Аналогично с ост частью области ⑥ (там $\leq \frac{20-x}{2}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Всего королей вокруг 9×9
$\leq S - \frac{(22-x)}{2} - \frac{(22-y)}{2} + \frac{20-y}{2} + \frac{20-x}{2} =$ +1 в среди 3 „особенных"
$= 210 - 2 + 1 = 209$
$\Rightarrow$ в 9×9 $\geq 220 - 209 = 11$, а не ≤ 10
$\Rightarrow$ таких 9×9 нет ~~...~~

ч.т.д.

Когда я рассматриваю зоны ⑥ и ④, ~~...~~ они точно сущ., т.к. если ~~...~~ например нету зоны ⑥, то $21-x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=21$, но т.к. $x \vdots 2$ то зоны ⑥ и ④ сущ. ~~(...)~~ (существование остальных зон я не использую.)

№3 (7)

Пусть это простое — p.

Тогда нетрудно заметить, что

число $\underbrace{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}_{x} > (abc)^2$

$\Rightarrow p^2 > abc$.

Пусть $(ab+a+1) \vdots p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ тогда ~~abc~~ $\vdots$ $abc =$

$= \frac{x}{p^2} \Rightarrow abc \vdots \frac{x}{ab+a+1}$, но $\frac{x}{ab+a+1}$ т.е. $(bc+b+1)(ac+c+1) > abc \Rightarrow$ две „p-ки" в одном множителе быть не может.

Пусть без ограничения общности $(ab+a+1) \vdots p$ и $(bc+b+1) \vdots p$ ~~тогда~~

~~abc, acb~~

Пусть a, b, c — нечетные $\Rightarrow$ $abc+1$ — чёт, а x — нечёт, но т.к. $x \vdots (abc+1)$, то это невозможно.

Если хотя бы a, b, c — хотя бы одно чёт и хотя бы одно нечёт, то $abc+1 - \not\vdots 2$,

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306281 — номер участника

и нетрудно понять ~~это~~ что x ~~будет~~ $\vdots 2 \Rightarrow \frac{x}{abc+1}$ и $\vdots 2 \Rightarrow p=4 \Rightarrow$

т.к. $p^2 > abc$, то

(I) $abc = 3$, но т.к. $a/b/c \vdots 2$ ($a \geq$ одно из a, b, c) то этот ~~вар~~ не возможен

(II) $abc = 1$. Аналогично невозможен случаю (I).

(III) $abc = 2$ (т.е. ~~а~~ нормальная ~~разница~~ $a=2$, $b=c=1$) ~~Тогда~~

$x = (2\cdot 1+2+1)\cdot(1\cdot 1+1+1)\cdot(2\cdot 1+1+1) = 5\cdot 3\cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 = \frac{5\cdot 3\cdot 4}{2} = 30$ (нет такого p) (x)

$\Rightarrow a, b, c$ — чётные.

т.к. $(abc+1) \vdots (ca+c+1)$, то

$abc \equiv_{ca+c+1} ca+c$ $\left| \cdot \frac{1}{c} \right.$ т.к. $(ca+c+1; c) = 1$ можем

$ab \equiv_{ca+c+1} a+1 \Rightarrow$ если $b < c$, ~~то~~

то $ab < ca+c+1$ (и $a+1 < ca+c+1$)

$\Rightarrow ab = a+1 \Rightarrow b=2; a=1$, но $a \vdots 2$, а $1 \not\vdots 2$ (x) $\Rightarrow b \geq c$

Также нетрудно заметить, что

$b \cdot z > abc+1 \Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1) < p^2 \cdot b$.

что такое? ?

Ответ: не может.