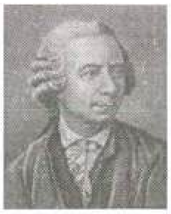


8

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-6 - 4В
аудитория – посадочное место

41306259
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ ПР	+ Пк	— ВБ	
7 АЮ	7 ЧД	7 МС	0 МК	21

№ 1

1 Если число n представимо в виде 2 послед. чисел, =>
$n = 2a_1 + 1$, где a_1 - натур. число, => $n \not\vdots 2$
2. в виде 3 послед. чисел, =>
$n = 3a_2 + 3$, => $n \vdots 3$
3. в виде 4 послед. чисел, =>
$n = \cancel{3a}\ 4a_3 + 6$, => $n \vdots 2$
4. в виде 5 послед. чисел, =>
$n = 5a_4 + 10$
5 в виде 6 послед. чисел, =>
$n = 6a_5 + 15$
Заметим, что число n не может быть и 2-хорошим и 4-хорошим, т.к. оно должно быть и четно и нечетно. к/,
=> Вася не может получить 5 петерок,
=> он может получить не больше 4 петерок.
Пусть $n = 105$, =>
$n = 52 + 53 = 34 + 35 + 36 = 19 + 20 + 21 + 22 + 23 =$
$= 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$, => Вася получит 4 ~~5~~ петерок.
Ответ: ~~5~~ 4 петерок.

№ 3

1. Заметим, что при неотрицательных $x, y, z, x \le y$ а $\frac{x}{y} \le \frac{x+z}{y+z}$, т.к.

$xy + xz \le xy + yz$, т.к. $xz \le yz$

2. $a^2+b^2+c^2 = a+b+c, \Rightarrow$

$a^2+b^2+c^2-a-b-c=0$

3. $(a-1)^2 \le b+c+1$, т.к.

$(a-1)^2 = a^2-2a+1 \vee b+c+1$

$a^2-a \vee a+b+c$

$a^2+b^2+c^2-b^2-c^2-a \overset{\le}{\vee} a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 \le b+c+1, \text{ аналогично} \\ (b-1)^2 \le a+c+1 \\ (c-1)^2 \le b+a+1, \Rightarrow \end{cases}$

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{b+c+a+1}$, т.к. $(a-1)^2 \le b+c+1$, $(a-1)^2 \ge 0, a \ge 0$, $b+c+1 \ge 0$

аналогично $\begin{cases} \frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} \\ \frac{(c-1)^2}{b+a+1} \le \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ продолжение на листе № 3

№ 3 (продолж.)

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{\cancel{a}(c-1)^2}{a+b+1}\leqslant$$

$$\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}+\frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1}+\frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1}\cancel{\leqslant}=$$

$$=\frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{a^2-2a+1+a+b^2-2b+1+b+c^2-2c+1+c}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{\overbrace{a^2+b^2+c^2-a-b-c}^{=0}+3}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}$$

$$\Rightarrow\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\cancel{=}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{a+b+c+1}.$$

№2

~~вы~~ Пусть всего n учеников и каждый посещает k кружков. ~~тогда~~

~~выпишем в ряд столбик учеников~~

Выпишем учеников и над ними напишем кружки, которые они посещают.

Каждая пара кружков встречается у 3-х учеников (т.к. для любых 2 кружков ровно 3 ученика их оба посещают), всего пар кружков $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, $\Rightarrow$ всего выписано 63 ~~кружков~~ пары кружков.

Каждый ученик посещает k кружков, $\Rightarrow$ над ним выписано $\frac{k(k-1)}{2}$ пар, всего учеников n, $\Rightarrow$

$\frac{n \cdot k(k-1)}{2} = 63$, $\Rightarrow$ $n \cdot \frac{k(k-1)}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$,

~~[illegible]~~ $6 < n < 60$, $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} n = 9, \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} = 7 \\ n = 7, \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} = 9 \\ n = 21, \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} = 3 \end{array}\right.$

~~n = 9~~

1. $\frac{k(k-1)}{2} = 9$, $k^2 - k - 18 = 0$, $D = 73$, $\Rightarrow$ нет $\mathbb{N}$ корней

2. $\frac{k(k-1)}{2} = 9$ 7, $k^2 - k - 14 = 0$, $D = 57$, $\Rightarrow$ нет. $\mathbb{N}$ корней

$\Rightarrow n = 21, \Rightarrow k = 3.$

Пример на 21

№ ученика	номера кружков, которые они посещяют
1	1 2 3
2	1 2 3
3	1 2 3
4	1 4 5
5	1 4 5
6	1 4 5
7	1 6 7
8	1 6 7
9	1 6 7
10	2 4 6
11	2 4 6
12	2 4 6
13	2 5 7
14	2 5 7
15	2 5 7
16	3 4 7
17	3 4 7
18	3 4 7
19	3 5 6
20	3 5 6
21	3 5 6

тогда каждую пару кружков посещяют 3 человека

Ответ: 21.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306259 — номер участника

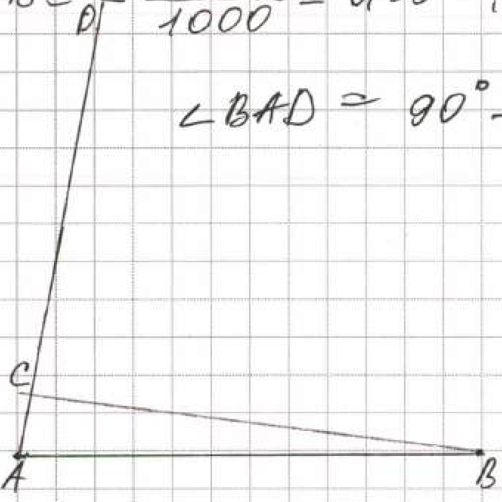
лист 6 из 6

№4

Возьмем отрезок AB длины 1, построим

$\angle ABC = \frac{360^\circ}{1000} = 0{,}36^\circ$, т.ч. $BC = 1$.

и $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABC = 89{,}64^\circ$, т.ч. $AD = 1$.



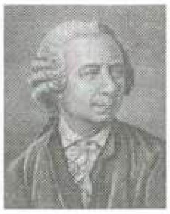
Далее из т. D отложим $\angle ADE = 0{,}36^\circ$,
т.ч. $DE = 1$.

Далее из т. E отложим $\angle DEF = 89{,}64^\circ$
т.ч. $EF = 1$.

и т.д. повторим такие операции ~~100~~ (откладывание отрезков длины 1 под $\angle$ $0{,}36^\circ$ и $\angle$ $89{,}64^\circ$) 1000 раз.

Сумма $\angle$ будет $0{,}36 \cdot 1000 = 360^\circ$, $\Rightarrow$ получится замкнутая тысячезвенная ломаная с $K = 1$.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-6 - 4В
аудитория – посадочное место

41306259
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ПР ✓	+ КН	∅ АП.	Ф кь	
7 ЧЮ	7 АЮ	∅ МК	Ф КА	14

№5

Разделим доску на квадраты 2×2.
Заметим, что в квадрате 2×2 не более 1 короля (т.к. короли друг друга не бьют).
~~[illegible]~~ Пусть это не так, => есть квадрат 9×9 в котором менее 11 королей, => в нем максимум 10 королей, назовем этот квадрат особенным.
Рассмотрим квадраты 2×2 (из разбиения) ~~в~~ которые имеют хотя бы 1 общую клетку с особенным квадратом, таких квадратов 25, т.к. 5 сторон таких квадратов ~~[illegible]~~ длины 10. Причем эти квадраты 2×2 образуют квадрат 10×10.
квадратов 2×2 не имеющих общих клеток с особенным квадратом
~~[illegible]~~ $\frac{30\cdot 30}{4}-25=200$, в каждом из них не более 1 короля, => в них не более 200 королей.

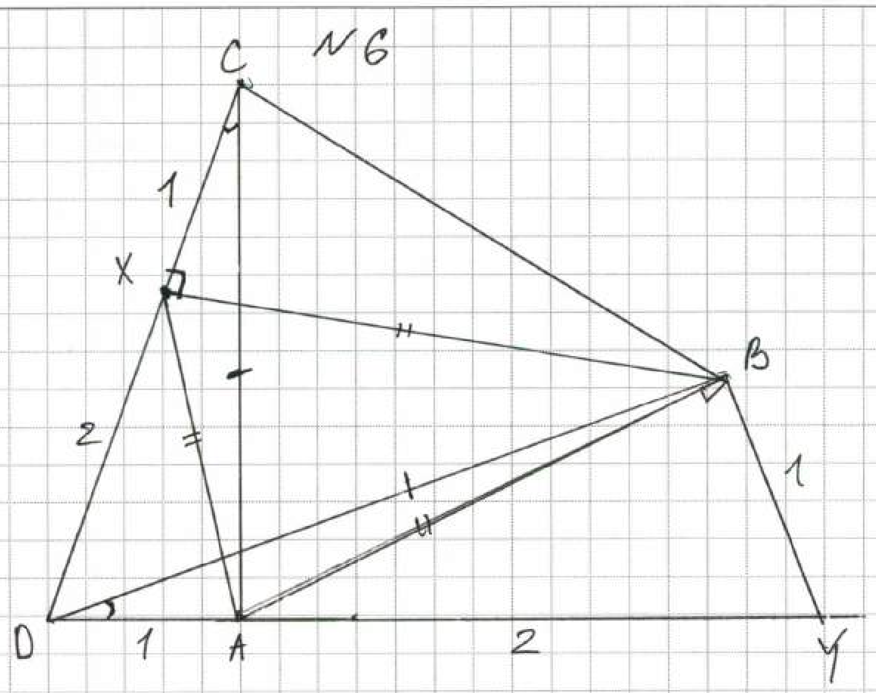
№5 (продолжение)

рассмотрим квадрат 10×10 (образованный 25 квадратами 2×2, имеющими общую клетку с особенным квадратом). разделим его на особенный квадрат 9×9 и уголок, образованный ~~первым~~ объединением столбца и строки, в этом уголке не более 9 королей, в особенном квадрате не более 10 королей, => на доске всего не более

$200+9+10=219<220$ королей.

Противоречие, => в любом квадрате 9×9 не менее 11 королей.

№6



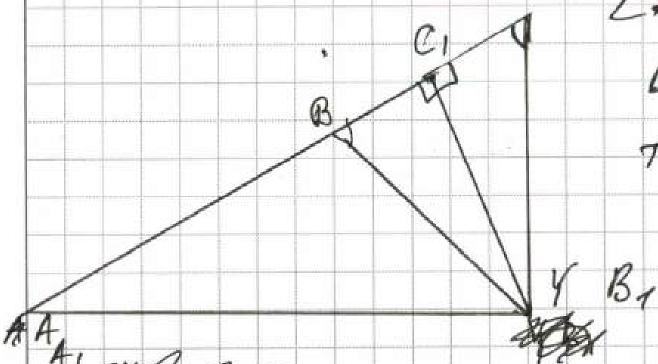
1. Продлим DA за т. A до DY, т. г. DY = 3, тогда AY = 3 − 1 = 2.
2. △DCA = △DBY (СУС):
CD = DY = 3, ∠BDY = ∠ACD, DB = CA, =>
BY = DA = 1, ∠BYA = ∠CDA, ∠DBY = ∠DAC.
3. ~~∠~~ DAB = 150°, => ∠BAY = 30°.
4. рассмотрим прямоугольный △$A_1B_1C_1$, с $\angle C_1 = 90°$, $\angle A_1 = 30°$, $A_1B_1 = 2$, $C_1B_1 = 1$, ~~[illegible]~~
5. в △ABY и △$A_1B_1C_1$ равны ~~[illegible]~~ и стороны $AY = A_1B_1 = 2$, $BY = C_1B_1 = 1$, и угол не между ними. ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
4,

№6 (продолжение).

~~рассмотрим 2 случая~~.

Пусть
$\triangle A_1B_1C_1 \neq \triangle ABY_1$
$\Rightarrow \angle BYA \neq C_1B_1A_1$

рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$
Построим $\angle A_1B_1B_1'$ т.г. $\angle A_1B_1B' = \angle BYA$, $B \in$ лучу AC_1.
тогда $\triangle A_1B_1B' = \triangle ABY$ (СУС)
$YB = B_1B_1'$, $\angle A_1B_1B' = \angle AYB$, $A_1B_1 = AY$,
$\Rightarrow B'B_1 = BY = B_1C_1$,
$\Rightarrow \triangle B'B_1C_1$ р/б с осн. BC_1, $\Rightarrow \angle C_1B'B_1 = \angle B'C_1B_1 = 90°$, $\Rightarrow$
в $\triangle$ 2 угла по 90° $\times$, $\Rightarrow$



~~углы~~

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABY$, $\Rightarrow \angle ABY = 90°$, $\angle BYA = 60°$

6. По т. Пифагора в $\triangle ABY$, $AB = \sqrt{3}$

7. построим на DC т. X, т.г. $CX = 1$.

8. $\triangle XAD = \triangle BAY$ (СУС)
$AY = XD = 2$, $AD = BY = 1$, $\angle AYB = \angle XDA$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle XDA = 60°$, $XA = AB$, $\angle XAD = \angle ABY = 90°$,
$\angle DXA = \angle BAY = 30°$.

№6 (продолжение)

9. $\angle DAB = \angle XAD + \angle XAB = \angle XAB + 90°, \Rightarrow$
$\angle XAB = 60°$.

10. $\triangle XAB$ р/б с осн. XB ($XA = AB$), с $\angle XAB = 60°$,
$\Rightarrow \triangle AXB$ р/с, $\Rightarrow \angle AXB = \angle XBA = \angle XAB = 60°$,
$XB = XA = AB$.

11. $\angle CXB = 180° - \angle BXA - \angle AYD =$
$= 180° - 30° - 60° = 90°$.

12. $\triangle CXB = \triangle BAY$ (СУС):
$1 = CX = BY$, $XB = AB$, $\angle CXB = \angle ABY$, $\Rightarrow$
$CB = AY = 2$.