8

Технический лист
День 1

## Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Гжель. - .........
аудитория – посадочное место

41306240
номер участника

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| + АУ | + ОЛ. | + МС | + АБ | |
| 7 ЕЗ | 7 Ема | 7 АУ | 7 МК | 28 |
| | | | | |

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс; 41306240 — номер участника; лист 1 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

## №1.

Оценка: он получит $\le 4$ пятерок.

Заметим, что чисел $>1$ и $<7$ ровно 5.

Пусть Вася загадал число $X$ и получил $\geq 5$ пятерок. Тогда $X$ $k$-хорошее для всех $k$: $>1$ и $<7$, в частности $X$ 2-хорошее и 4-хорошее.

т.к. таких $k$ всего 5

пусть $X = a+(a+1) = 2a+1 \Rightarrow X$ нечетное

$X = b+(b+1)+(b+2)+(b+3) = 4b+6 = 2(2b+3) \Rightarrow X$ четное

Противоречие. Значит Вася не мог получить $\geq 5$ пятерок.

Пример: если Вася придумает число 45, он получит 4 пятерки.

$45 = 22+23$ 2-хорошее

$45 = 14+15+16$ 3-хорошее

$45 = 7+8+9+10+11$ 5-хорошее

$45 = 5+6+7+8+9+10$ ~~11~~ 6-хорошее.

Значит Вася может получить 4 пятерки, $a \geq 5$ ~~4~~ не может.

Ответ: ~~Вася получит~~ 4 пятерки.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306240 — номер участника

лист 2 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

## №2.

Пусть учеников $x$, каждый ходит в $k$ кружков.

Тогда: для каждой пары кружков ровно 3 ученика их оба посещают, пар кружков $\cancel{42}$ 21 =7 ⇒ всего ровно $\cancel{126}$ 63 троек из 2 различных кружков и ученика, таких что ученик ходит в эти оба кружка.

В свою очередь каждый ученик участвует ровно в $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ таких тройках (выбирается 2 кружка из тех, куда он ходит).

Значит $63 = C_k^2 \cdot x$. Переберем возможные $k$:

| $k$ | $C_k^2$ | $\frac{63}{C_k^2} = x$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | нельзя делить |
| 2 | 1 | 63 > 60, не подходит |
| 3 | 3 | 21 → подходит |
| 4 | 6 | не делится |
| 5 | 10 | не делится |
| 6 | 15 | не делится |
| 7 | 21 | 3 < 6, не подходит |

Значит $x = 21$.

Ответ: 21.

Без примера решение верно

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306240 — номер участника

лист 3 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

## №4

Ответ: при $k=250$.

Оценка: ~~при $k \geq 251$ таких~~ $k \leq 250$.

Пусть $k \geq 251$.

Рассмотрим любой отрезок, пусть $A$. ~~Ему перпендикулярно $\geq k$ отрезков, каждому из них тоже.~~ Докажем, что ему параллельно ~~и ему $\geq k$~~ $k-1$ отрезков (включая его самого) и перпендикулярно $\geq k$ отрезков. Перпендикулярно ему $\geq k$ по условию, рассмотрим любой из таких отрезков, пусть $B$. Тогда $B$ $\perp$ $\geq k$ отрезков, но если какой-то $C \perp B$, то $C \parallel A$. Утверждение доказано.

~~Теперь снова рассмо~~ 1. Пусть есть отрезок не $\parallel A$ и не $\perp A$, пусть $B$. Тогда всего отрезков $\geq 4k$

$$\Big(\underbrace{(\parallel A)}_{\geq k} + \underbrace{(\perp A)}_{\geq k} + \underbrace{(\parallel B)}_{\geq k} + \underbrace{(\perp B)}_{\geq k}\Big).$$

Но $k \geq 251$. Противоречие.

по аналогичному утверждению.

2. Теперь если таких отрезков нет. Тогда ломаная чередует параллельные $A$ и $\perp A$ отрезки равной длины, пусть длины 1 клетка. Но тогда у ломаной нет самопересечений (т.к. она идет по линиям сетки). Противоречие.

Во перенесем её начало в вершину сетки и если надо повернем ломаную.

№4 (продолжение 1)

Поясним, как сделать так, что ломаная идёт по линиям сетки:

1. Заметим, что при параллельном переносе и повороте сетки условие сохранялось, это продолжает выполняться.

2. Перенесём параллельно любую вершину ~~сетки~~ ломаной в вершину сетки, повернём ломаную так, что какое-нибудь звено из этой вершины легло на сетку.

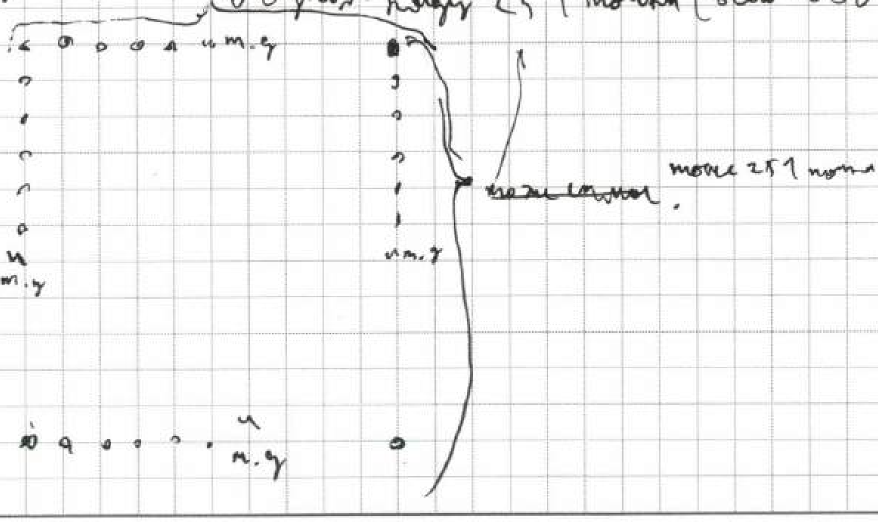
Тогда теперь все звенья параллельны „горизонтальной" или „вертикальной" прямым сетки ( или ).

Также все звенья имеют длину 1 кл. Значит вся ломаная идёт по сетке.

Значит $k \geq 251$ быть не может.

Пример для $k = 250$:

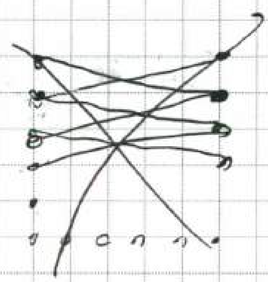
в одном ряду 251 точка (всего $1000 = 251 \cdot 4 - 4$ угловых)



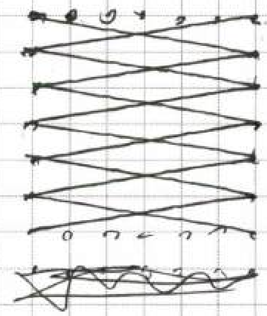
№4 (продолжение 2)

ребра проводим так:

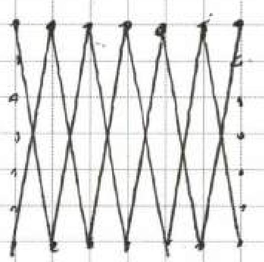
(хочу нарисовать пример для 24 звеньев)



Для 1000-звенной проводим такие



Этот и этот



1. Почему это 1000-звенная ломаная: из каждой вершины выходит 2 ~~ребра~~ звена, вершин 1000 => звеньев 1000

2. Почему это замкнутая ломаная, а не несколько ломаных:
Проследим путь от левой верхней вершины пока не замкнемся. Сначала направо на 250, вниз на 1, потом налево на 250, вниз на 1 и т.д. придем влево вниз, пройдя 250 ~~ребер~~ звеньев

Потом вправо на 1, вверх на 250, вправо на 1, вниз на 250 и т.д. придем вправо вниз пройдя еще 250 звеньев.

Потом на 1 вверх на 250 влево, на 1 вверх, на 250 вправо и т.д.

N 4 (продолжение 2)

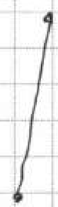
Придем в правую верхнюю вершину, пройдя ещё 250 звеньев

И ~~Эт~~ потом влево на 1, вниз на 250, влево на 1, вверх на 250 и т.д

Придем влево вверх, пройдя ещё 250 ~~ребер~~ звеньев.

Значит ~~эт~~ эта ломаная пройдет все 1000 звеньев, значит это 1 ломаная

3. Почему каждое звено ⊥ 250 других?

~~Нет~~ ~~Эт~~ Пусть звено ~~соединяет в~~  такого типа. Тогда оно пересекает все звенья  такого типа и перпендикулярно по ним. Таких звеньев 250. Для других направлений ребер аналогично

4. Все звенья равны по длине $\sqrt{250^2+1}$.

Значит пример верный.

Значит ~~$k \le 251$~~, $k \le 250$, а $k=250$ подходит.

Ответ: при $k=250$.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306240 — номер участника

лист 7 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

N3.

~~I прибавим~~ Заметим, что $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-$

$-2(a+b+c)+3=-(a+b+c)+3=3-(a+b+c).$

II Прибавим и вычтем к ~~левой~~ правой части $\frac{a+b+c}{a+b+c+1}$:

$$\frac{3-(a+b+c)}{a+b+c+1}+\frac{a+b+c}{a+b+c+1}=\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{a+b+c+1}+\frac{a+b+c}{a+b+c+1}.$$

~~III~~ Заметим, что

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}-\frac{(a-1)^2}{a+b+c+1}=(a-1)^2\left(\frac{1}{b+c+1}-\frac{1}{a+b+c+1}\right)=a(a-1)^2\cdot\frac{1}{(b+c+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{a+b+c+1}\overset{\text{пусть}}{=}X$$

Аналогично

$$\frac{(b-1)^2}{a+c+1}-\frac{(b-1)^2}{a+b+c+1}=b(b-1)^2\cdot\frac{1}{a+c+1}\cdot\frac{1}{a+b+c+1}\overset{\text{пусть}}{=}Y$$

и $$\frac{(c-1)^2}{a+b+1}-\frac{(c-1)^2}{a+b+c+1}=c(c-1)^2\cdot\frac{1}{a+b+1}\cdot\frac{1}{a+b+c+1}\overset{\text{пусть}}{=}Z$$

~~Обозначим~~ Вычтем из левой и правой части нер-ва $(X+Y+Z)$

№3 (продолжение)

~~Слева и~~ Сравним:

$$\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{a+b+c+1} \vee \frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{a+b+c+1}+\frac{a+b+c}{a+b+c+1}-(x+y+z).$$

сократим.

Теперь хотим $\frac{a+b+c}{a+b+c+1} \geq x+y+z = \dfrac{\frac{(b-1)^2 b}{a+c+1}+\frac{(a-1)^2 a}{b+c+1}+\frac{(c-1)^2 c}{a+b+1}}{a+b+c+1}$

Сократим знаменатели:

$$a+b+c \vee \cancel{\frac{(b-1)^2 b}{}} \; \frac{(a-1)^2 a}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2 b}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2 c}{a+b+1}$$

но $a \geq a\left(\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\right)$, т.к. $(a-1)^2 = a^2-2a+1 \leq a^2+b^2+c^2-a+1 = (a+b+c)-a+1 =$
$= b+c+1$

аналогично $b \geq b\left(\frac{(b-1)^2}{a+c+1}\right)$ и $c \geq \frac{(c-1)^2 c}{a+b+1}$.

Значит $a+b+c \geq \frac{(a-1)^2 a}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2 b}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2 c}{a+b+1}$.

~~Значит~~

Значит $\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{a+b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{a+b+c+1}+\frac{a+b+c}{a+b+c+1}-(x+y+z)$.

Значит $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{3}{a+b+c+1}$. ЧТД.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 2

## Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

ГЖЕЛЬ - .........

аудитория – посадочное место

41306240

номер участника

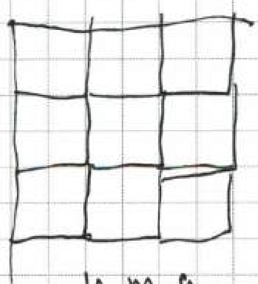
| 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| + АА | + РХ | + ЧД | + МК | |
| 7 ЧД | 7 МС | 7 РХ | 7 КЮ | 28 |
| | | | | |

8 41306240

класс номер участника лист 1 из 8

№1.5

Разобьем доску на квадраты $2\cdot2$:



их будет ~~15~~ $15\cdot15=225$.

и т.д.

и т.д.

В каждом квадрате стоит $\le 1$ короля ~~(все клетки~~.

Значит 0 королей стоит в 5 квадратах $(225-220=5)$.

Рассмотрим любой квадрат $9\cdot9$.

В нем полностью находятся 16 квадратов $2\cdot2$. (по каждому измерению ~~4~~ квадрата, т.к. $\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$).

Максимум в 5 из них нет королей.

Значит всего хотя бы ~~11~~ $16-5=11$ королей. ЧТД.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

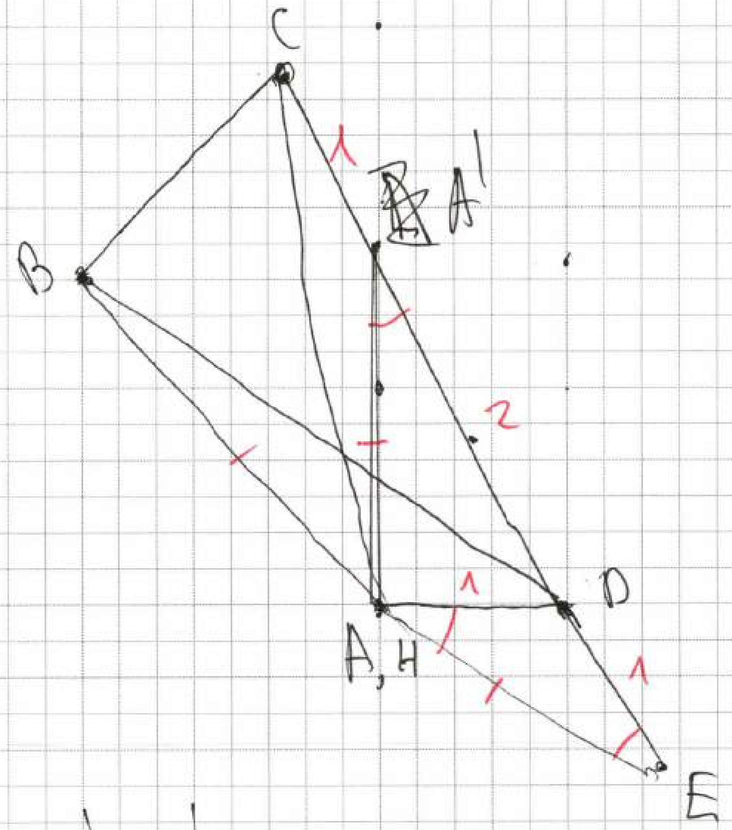
8 — класс

41306240 — номер участника

лист 2 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№7.6




$\angle ACA'$

$A'$: $A'C = AD = 1$.

Тогда $\triangle ABD = \triangle A'AC$ (I пр., $BD = AC$, $AD = A'C$, $\angle CAD = \angle BDA$). Значит

1. $\angle AA'D = 180° - \angle CA'A = 30°$
2. $AA' = AB$.
3. $A'D = 3 - A'C = 2$.

№6 (продолжение)

Тогда в $\triangle AA'D$

1. $A'D = 2AD$
2. $\angle AA'D = 30°$.

Опустим высоту $DH$ на $A'A$.

Тогда $\triangle A'DH$ имеет углы $90°, 30°$ и $60° \Rightarrow DH = \frac{1}{2}A'D = AD$.

Но если $H \neq A$, то $\angle DHA = 90° \Rightarrow DH < AD$. противоречие.

Значит $A = H \Rightarrow \angle A'AD = 90°$ и $\angle A'DA = 60°$.

$\angle BAD > 150°$, $\angle A'DA = 60° \neq 180° - 150°$. Значит $BA$ не $\parallel A'D$. и перес со стороны $A$ и $D$

Пусть они пересекаются в точке $E$.

Тогда

1. $\angle DAE = 30°$, $\angle ADE = 120° \Rightarrow \angle AED = 30°$ и $AD = DE = 1$
2. ~~т.к.~~ $\angle AA'E = 30° = \angle A'EA$, значит $EA = AA'$.

Тогда $\triangle EBC$ подобен с коэф. 2 треугольнику $A'AD$:

$$\frac{EB}{EA} = \frac{AB+AE}{AE} = \frac{AB + A'A}{A'A} = \frac{2AB}{AB} = 2$$

$$\frac{CE}{A'D} = \frac{CA' + A'D + DE}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\angle CEB = 30° = \angle DA'A$.

Значит $BC = 2 \cdot AD = 2$.

Ответ: 2.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306240 — номер участника

лист 4 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

N7

предположим, что частное равно $q^2$, где $q$ - простое.

~~1. q=2~~ получим равенство $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=q^2(abc+1)$

1. $q=2$, ~~[illegible]~~ $(ab+a+1)(bc+b+1)>abc+1$

Значит $ac+c+1\leq 3 \Rightarrow a=1=c$.

Аналогично $a=1=b$.

Но $3\cdot3\cdot3 \not\vdots 2$. Значит $q\neq 2$ (+)

2. $q\neq 2$.

Поделим ~~первую~~ левую часть ~~на~~ 2 раза на $q$, т.к. $q$ простое, мы просто поделим на $q$ 2 какие-то (возможно одну и туже) скобки.

2.1. Мы поделили 1 скобку на $q^2$. Но произведение других двух $>abc+1$. Противоречие.

2.2. Мы поделили 2 разные скобки. Пусть вторую и третью. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} bc+b+1 \vdots q &\Rightarrow abc+ab+a \vdots q \\ ac+c+1 \vdots q &\Rightarrow abc+bc+b \vdots q \end{aligned}\right\} \Rightarrow ab+a-(bc+b) \vdots q$$

$$\Downarrow$$

$$(bc+b+1)+(ab+a-(bc+b))=$$

$$=ab+a+1 \vdots q. \quad (+)$$

Значит левая часть $\vdots q^3$.

Значит правая часть $\vdots q$

N7 (продолжение)

~~Зн~~ То есть $abc+1 \vdots q$
но $abc+ab+a \vdots q$ } => $ab+a-1 \vdots q$
но $ab+a+1 \vdots q$ } => $2 \vdots q$ => $q=2$. Противоречие

+

~~но ab~~

~~2. 2 разобран.~~ Случай 2.2 разобран.

~~2 разо~~

~~Значит~~ Получили противоречие. о том, что частное равно $q^2$, где $q$ - простое
Значит предположение неверно.

Ответ: нет.

N8.

Ответ: нет.

Предположим, что ~~так~~ так случилось.

Упорядочим гири по массе:

$a_1 < a_2 \dots < a_{50}$.

Рассмотрим такие ~~24~~ 23 набора:

$\{a_{28}, a_{29} \dots a_{50}\}$ + элем. из $\{\cancel{a_3}, \cancel{a_4} \dots a_{26}\}$ $a_4, a_5$

и еще такие 22:

$a_6, a_7$

$\{a_{4}, a_{29}, a_{30}, a_{31} \dots a_{50}\}$ + элем из $\{\cancel{a_5}, \cancel{a_6} \dots a_{27}\}$.

~~Иоз~~ Назовем эти наборы $B_1 \dots B_{23}$ и $C_1 \dots C_{22}$

N8 (продолжение 1)

Посмотрим, сколько гирь может быть в группах из оставшихся гирь, по сумме масс равных данным.

Пусть суммарная масса $S$. Если сумма масс гирек в каком-то из этих наборов равна сумме оставшихся 26 гирек, то сумма в этом наборе равна $\frac{S}{2}$, но тогда $a_{27}+a_{28}+\ldots+a_{50}>\frac{S}{2}$, значит если рассмотреть эти 24 гири, то сумма оставшихся будет меньше чем их сумма. Противоречие.

то есть $a_{27}-a_{50}$.

~~Если набор из первой гр уравнив~~

Пусть $B_i$ уравновесили $\le 24$ оставшимися гирьками, пусть $a_{j_1}<a_{j_2}\ldots<a_{j_k}$ $k\le 24$.

Если $k<24$, то $a_{28}+a_{29}+\ldots+a_{50}>a_{j_1}+a_{j_2}+\ldots+a_{j_k}$. Противоречие

Иначе $j_1\le 3$ (от 4 до 50 свободно, то есть не в $B_i$, только 23 гири)

но тогда $a_{j_1}<a_4\le$ первый (наименьший) элем $B_i$

и $a_{j_2}+a_{j_3}+\ldots+a_{j_k}<a_{28}+a_{29}+\ldots+a_{50}$. Противоречие.

Значит все $B_i$ мы уравновесили 25 гирьками. OK.

Пусть $C_i$ уравновесили $\le 24$ оставшимися гирьками, пусть $a_{j_1}<a_{j_2}\ldots<a_{j_k}$ $k\le 24$.

Если $k<23$, то $a_{29}+a_{30}+\ldots+a_{50}>a_{j_1}+a_{j_2}+\ldots+a_{j_k}$

N 8 (продолжение 2)

Получим противоречие.

Если $k \geq 23$, то $j_1 < 6$ (от 6 до 50 свободно (то есть не в $C_i$) только 22 гири) но тогда $a_{j_1} <$ а. ~~первый~~ второй (то есть второй ~~самый~~ в сортировке по возрастанию) элем $C_i$ и $a_{j_2} + a_{j_3} + \ldots + a_{j_k} < a_{29} + a_{30} + \ldots + a_{50}$. Противоречие.

Если $k = 24$, то $j_1 < 4$ (от 4 до 50 свободно (то есть не в $C_i$) только 23 гири) и $j_2 < 6$ (от 6 до 50 свободно (то есть не в $C_i$) только ~~22~~ 23 гири). но тогда ~~$a_{j_1} <$ первый (то есть наименьший)~~ ~~элем $B_i$~~ $a_{j_1} < a_4$, $a_{j_2} <$ второй (то есть второй при сортировке по возрастанию) элем $C_i$ и $a_{j_3} + a_{j_4} + \ldots + a_{j_k} < a_{29} + a_{30} + \ldots + a_{50}$. Противоречие.

Значит все $C_i$ мы уравновесим 25 гирями.

Рассмотрим ~~для~~ для каждого $i$ от 1 до 23 гирю не участвующую в $B_i$ и уравновешивающую $B_i$ (такая ровно 1) и для каждого $j$ от 1 до 22 гирю не участвующую в $C_j$ и уравновешивающую его (такая ровно одна). Все такие гири принадлежат множеству $\{a_1, a_2 \ldots a_{28}\}$. Значит какой-то элем. мы рассмотрим $\geq 2$ раза (т.к. мы рассмотрели 45 элементов), пусть $a_k$, и ~~а раз~~ пусть рассмотрели мы его для множеств ~~$C_4$~~ D и E.

№8 (продолжение 3).

Тогда сумма масс гирек в $D$ равна $\frac{S-a_k}{2}$ и в $E$ равна $\frac{S-a_k}{2}$. Значит сумма масс гирек в $D$ и $E$ равна. Пусть $f(G)$ = сумма масс гирек в $G$. тогда $f(D)=f(E)$ но

$f(B_{23}) > f(B_{22}) > \ldots > f(B_1) > f(C_{22}) > f(C_{21}) > \ldots$

$\ldots > f(C_1)$.* Получили противоречие.

Значит предположение о том, что такой набор гирек существует неверно.

<u>Ответ:</u> нет, не может.

*- то есть среди $B_1 \ldots B_{23}$ и $C_1 \ldots C_{22}$ нет двух с равной суммой масс гирек.