РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ПЛАКСИНА

Имя: ПОЛИНА

Отчество: ВИТАЛЬЕВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Кировская область

4. Контактный телефон +7 909 721 7707

5. Контактный электронный адрес plaksinapolina260@gmail.com

12:16 – 12:25

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Плаксина Полина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Возможные k: 2, 3, 4, 5, 6

Если число представим в виде $n = a + (a+1) + (a+2) \dots + (a+k-1)$ из k последовательных чисел, то $n = a \cdot k + \frac{k(k-1)}{2}$,

т.е. $n - \frac{k \cdot (k-1)}{2} \vdots k$?

Запишем ~~все~~ такие условия для каждого k

1) $n - 1 \vdots 2$ •
2) $n - 3 \vdots 3$
3) $n - 6 \vdots 4$ •
4) $n - 10 \vdots 5$ •
5) $n - 15 \vdots 6$ •

заметим, что все выполнятся сразу не могут т.к. $n-1 \vdots 2 \Rightarrow n$ – нечет

$n - 6 \vdots 4 \Rightarrow n$ – чет Σ

Следовательно Вася может получить max 4 пятерки

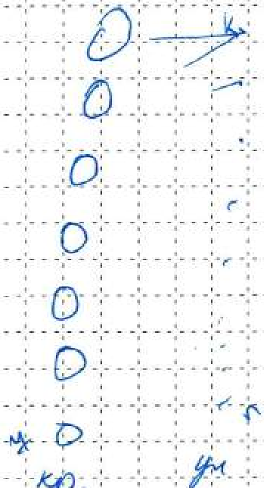
Пример: $n = 45$

1) $45 = 22 + 23$
2) $45 = 14 + 15 + 16$
3) $45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$
4) $45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: [illegible]

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Представим в виде двудольного графа, где вершины с одной стороны - это ученики, с другой кружки.



Будем считать галочки, 1 уч, 2 круж.

если считать по основаниям, то их

$C_7^2 \cdot 3 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 63$, т.к. из условия на каждую пару кружков отрисуется ровно 3 галочки. Пусть у нас n учеников, и у каждого k ребер

$63 = n \cdot C_k^2$, $6 < n < 60$

тогда C_k^2 должно быть делителем 63, k натуральное и $k \geq 2$, переберем какие значения может принимать C_k^2

k	C_k^2
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66

при $k \geq 12$ $C_k^2 > 63$ ↯

Выберем те, что являются делителями 63.

$k=2$, $C_k^2 = 1 \Rightarrow n = 63$ ↯

$k=3$, $C_k^2 = 3 \Rightarrow n = 21$

$k=7$, $C_k^2 = 21 \Rightarrow n = 3$ ↯

Ответ: $n=21$, существование 1 примера - очевидно из условия

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Плакшина Полина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{1+a+b+c}$ $\quad a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$a, b, c \geq 0$

все 3 дроби слева симметричны

1) Докажем, что они правильные или равны 1

МотП $\quad a^2-2a+\cancel{1} > b+c+\cancel{1}$

$a^2 > 2a+b+c = a^2+b^2+c^2+a$

$0 > b^2+c^2+a$, но все числа не отриц. ↯

⇓

дробь правильная или 1

если мы к числителю и знаменателю прибавим одно и то же не отрицательное значение, то дробь не уменьшится $\quad \frac{a}{b} \le \frac{a+x}{b+x}$ (если $x>0$) $\Leftrightarrow$ $ab+bx \geq ab+ax$

$b \geq a$ — И

если $x=0$, то равенство

⇓

$\frac{a^2-2a+1}{b+c+1} \le \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}$

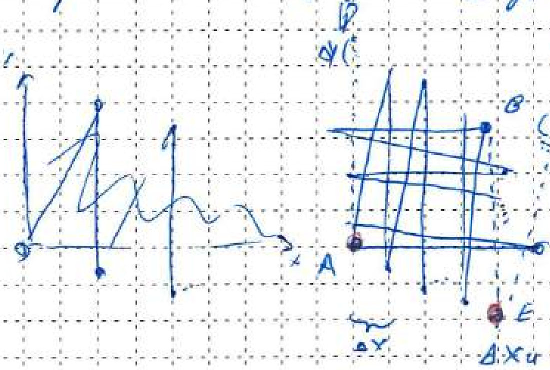
Тогда значение слева $\le \frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{a+b+c+1} =$

$\frac{(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1}$

Задача № 4 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Плакина Полина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Пример на 249. Заведём координатную плоскость. ~~Возьмём~~ так, что одна вершина в (0,0) а следующие в первой четверти. Длина одного звена a.



Сначала будем чередовать звенья 1 и 2 группы, так 499 раз. и мысленно ещё 2 раза (это то, что мы повернём), тогда ширина по X (между A и B) всего выходит 251ΔX. D и E

ΔX и ΔY мы можем задать сами так что ΔX=ΔY.

и высота по y между A и B − a − 250ΔY*. Тогда мы повернём всё это на 90° и начнём в точке B уже из 501 звена чередуя 2' и 1' типы тогда по ширине по X от ~~A~~ A до D он будет a − 251ΔY, по высоте 251ΔX. Тогда он должен попасть в точку A ~~т.к.~~ если a = 501ΔX = 501ΔY. Мы можем взять такие значения.

Тогда кол-во типов 1 − 250, 2 − 249, 1' − 250, 2' − 251

и каждое звено полностью пересекает другую группу

k = 249.

От примера — только идея зубцов.

* ширина по X между A и B − 250ΔX

высота по y между A и C − a − 251ΔY (D и E)

A-B это то что мы делаем из 1 и 2 группы.

~~D~~ − E, это из групп 1' и 2' повёрнутое на 90°

~~Мы~~ ΔX и ΔY мы выбираем когда берём наклон для 2 типа.

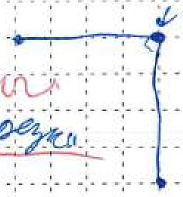
Задача № 4 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Плашкина Полина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Оценка, $k \le 250$

Все ~~отрезки~~ звенья разобьём на группы параллельных, а группы побьём на пары перпендикулярных. Тогда каждое звено может пересечь отрезков не больше чем кол-во звеньев в группе, которая стоит в паре с его группой. Групп должно быть чётное, иначе она не побьются на пары и у каких-то звеньев не будет перпендикулярных им. n - кол-во групп.

1) $n=2$, тогда раз всего 2 группы, ~~то всего~~ то посмотрим на вершину

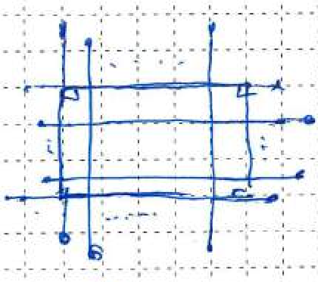


из нее могут идти только перпендикулярные отрезки

или пересекаться

но тогда если мы заведем координатную плоскость и возьмём звено, обозначим вершины $(0,0)$ и $(0,a)$, то заметим что каждая из координат всегда будет $\ne a$, но тогда этот отрезок не получится пересечь и $k=0$

2) $n=4$, по методу Дирихле в какой-то группе ≤ 250 звеньев $\Rightarrow k \le 250$, если $k=250$, то в каждой группе ровно 250 звеньев и каждое пересекает всю другую группу из пары. Рассмотрим каждую пару групп.



В каждой группе 250 звеньев, у каждого 2 вершины, вершины пересекаться не могут, т.к. иначе звено с этой вершиной не могло бы пересечь звено из другой группы $\Rightarrow$ тут вершин $250 \cdot 2 \cdot 2 = 1000$

Больше вершин нет

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ПЛАКСИНА

Имя: ПОЛИНА

Отчество: ВИТАЛЬЕВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Кировская область

10:45-10:50

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Плаксина Полина

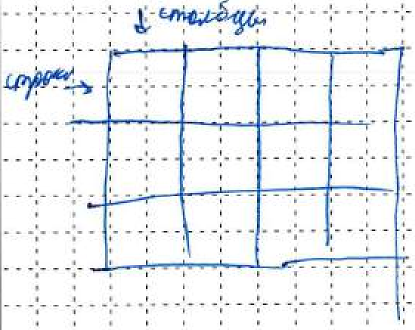
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разобьём доску на квадратики 2×2 и заметим, что в каждом таком может стоять ≤ 1 короля

Всего квадратов $15\times15=225 \Rightarrow$ ровно 5 квадратов пустые.

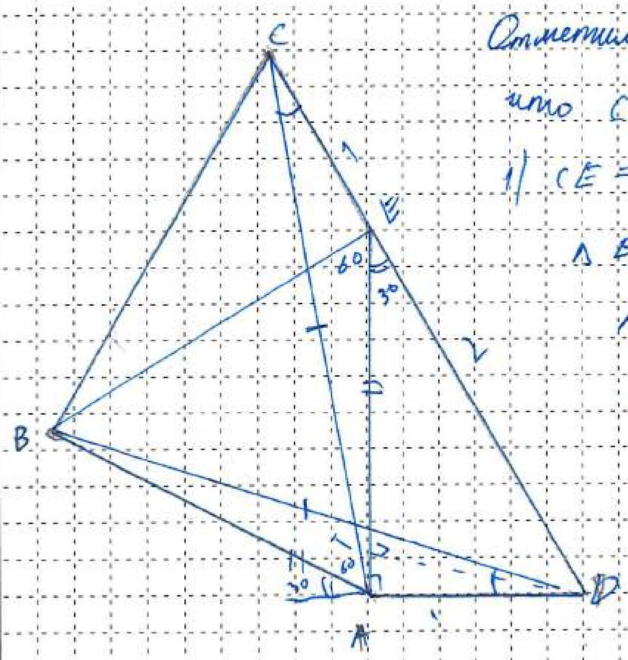
Заметим, что каждый квадрат 9×9 покрывает полностью 16 квадратиков, потому что пусть прямые, образующие границы квадратиков, в квадрате 30×30 образуются строки и столбцы с промежутками 2 клеточки.

Тогда в любом квадрате 9×9 полностью есть 4 строки и 4 столбца, в их пересечении ровно 16 квадратиков, из них max 5 пустые $\Rightarrow \geq 11$ королей



Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: [handwritten name]

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Отметим на CD точку E так, что $CE = AD = 1$

1) $CE = AD$, $\angle ACE = \angle ADB$, $AC = BD$
⇓
$\Delta BDA = \Delta ACE$
⇓
$AB = AE$ и $\angle BAD = \angle AEC = 150^\circ$
⇓
$\angle AED = 30^\circ$

2) $ED = CD - CE = 3 - 1 = 2$

3) Опустим высоту DT из D на AE

4) $DT = \frac{1}{2} DE = 1$, т.к. $\angle AED = 30^\circ$
⇓
ΔADT - р/б, но $\angle DTA = 90^\circ$ ⇓
⇓
T совпадает с A и $\angle EAD = 90^\circ$

5) $\angle BAE = 150^\circ - \angle EAD = 60^\circ$
⇓
$BE = AE$ и $\angle BEA = 60^\circ$
⇓

6) $\angle BEC = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ = \angle EAD$
+ $CE = AD$ и $BE = AE$
⇓
$\Delta BEC = \Delta EAD$
⇓
$BC = ED = 2$

Задача № 7 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Плаксина Полина

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=p^2\cdot(abc+1)$, p-простое

Посмотрим сколько скобок делятся на p.

1) если одна $\vdots p^2$, то 2 другие $\leq abc+1$, но

$(bc+b+1)(ac+c+1)=c^2ab+1+\ldots \in \mathbb{N} > abc+1$ ↯ ✓

$c^2ab \geq abc$

⇓

≥ 2 скобки делятся на p

2) если ровно 2, НУО

$ab+a+1 \not\equiv 0$

$bc+b+1\equiv 0$ $\mod p \Rightarrow$ $c\equiv -\frac{b+1}{b}$ ✓

$ac+c+1\equiv 0$ $c\equiv -\frac{1}{a+1}$ ✓

$-c\equiv \frac{b+1}{b}\equiv\frac{1}{a+1}\Rightarrow$ $ab+a+b+1\equiv b$

$ab+a+1\equiv 0$ ↯

⇓

все 3 скобки $\vdots p \Rightarrow abc+1\vdots p$ ✓

⇓

$ca+c\equiv abc$ (mod p) $c,a,b\not\equiv 0$, т.к. иначе скобки где эта буква встречается 2 раза $\not\vdots p$

$c(a+1)\equiv c(ab)$

$a+1\equiv ab$ ~~[illegible]~~ $c\not\equiv 0$ — очевидно

$ab+a+1\equiv 0\equiv 2(ab)$, если p не 2, то $ab\equiv 0$

⇓

$a\equiv 0$ или $b\equiv 0$ ↯

⇓

$p=2$, но

произведение слева равно $a^2b^2c^2+(a^2bc+ab^2c+abc^2)+\ldots+a+b+c+3 >$

$a^2b^2c^2 \geq abc$, $(\ldots) \geq 2\cdot 3\cdot abc$, $\ldots \geq 4$

$> 4abc+4$, т.к. числа натуральные ↯

⇓

Такого не бывает